شماره داوطلب
نام خانوادگی و نام
- - -
خراسان رضوی
شهر

05138453690

سروش اندیشه
مؤسسه فرهنگی هنری

کد آزمون	۱۳۰۷

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت فرهنگ و ارشاد
اسلامی موسسه سروش
اندیشه حیات

۲۰ فروردین ۱۴۰۵

پاسخنامه آزمون شبیه ساز کنکور

گروه آزمایشی علوم ریاضی

نام و نام خانوادگی: شماره داوطلبی:

تعداد سوال: ۹۰عدد مدت پاسخگویی: ۱۳۰دقیقه

عنوان مواد امتحانی تعداد،شماره سوالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سوال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
۱	ریاضیات	۳۵	۱	۳۵	۶۵ دقیقه
۲	فیزیک	۳۰	۳۶	۶۵	۴۰ دقیقه
۳	شیمی	۲۵	۶۶	۹۰	۲۵ دقیقه

برای مشاهده پاسخنامه آزمون به سایت موسسه مراجعه نمایید

نام:

نام خانوادگی:

نام آزمون: پاسخ دوازدهم ریاضی تستی کل

تعداد سوال: ۹۰

نام برگزارکننده: موسسه سروش اندیشه

۱ گزینه «۲»

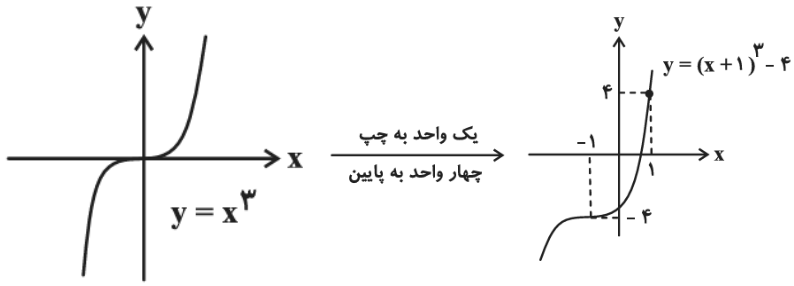
با کمک تعیین علامت عبارت قدرمطلقی، ضابطه تابع را به صورت یک تابع قطعه‌ای بازنویسی می‌کنیم:

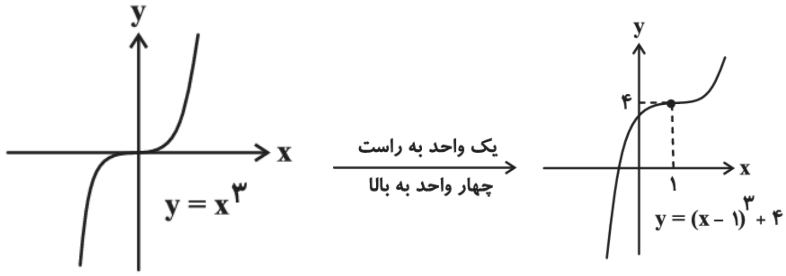
$$f(x)=\begin{cases} x^۳+۳x+۳(x+۱)(x-۱) & ; \quad x\geq ۱ \\ x^۳+۳x-۳(x+۱)(x-۱) & ; \quad x<۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^۳+۳x+۳x^۲-۳ & ; \quad x\geq ۱ \\ x^۳+۳x-۳x^۲+۳ & ; \quad x<۱ \end{cases}$$

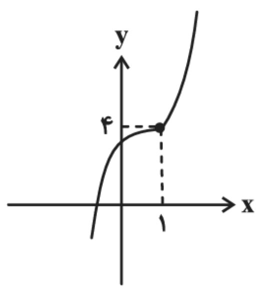
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} (x+۱)^۳-۴ & ; \quad x\geq ۱ \\ (x-۱)^۳+۴ & ; \quad x<۱ \end{cases}$$

حال توجه کنید که نمودار توابع $y=(x+۱)^۳-۴$ و $y=(x-۱)^۳+۴$، به کمک قوانین انتقال از روی نمودار تابع $y=x^۳$ به صورت زیر رسم می‌شوند:





بنابراین نمودار تابع f به صورت زیر است:

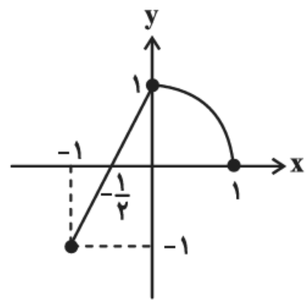


۲ گزینه «۱»

توجه کنید که اگر فرض کنیم $g(x)=k^x+۱$ و $h(x)=\log_k x$ باشد، $f(x)=(hog)(x)$. اگر $k>۱$، هر دو تابع h و g اکیداً صعودی‌اند و در نتیجه f اکیداً صعودی است. اگر $۰<k<۱$، توابع h و g اکیداً نزولی‌اند و در نتیجه f اکیداً صعودی است. بنابراین اگر $k\in(۰,+\infty)-\{۱\}$، تابع f اکیداً صعودی است.

گزینه «۲»

نمودار تابع f به صورت زیر است:



و برای تعیین وضعیت یکنوایی تابع fof، لازم است که ضابطه (های) آن را به دست آوریم:

$$(fof)(x)=f\left(f(x)\right)=\begin{cases}2f(x)+1 & ; \quad -1\le f(x)<0\\ \sqrt{1-f(x)} & ; \quad 0\le f(x)\le 1\end{cases}$$

با توجه به نمودار تابع f مشخص است که در بازه $[-1\ ,\ -\frac{1}{2})$، $-1\le f(x)<0$ و در بازه $[-\frac{1}{2}\ ,\ 1]$، $0\le f(x)\le 1$ است.

$$\Rightarrow (fof)(x)=\begin{cases}2(2x+1)+1 & ; \quad -1\le x<-\frac{1}{2}\\ \sqrt{1-(2x+1)} & ; \quad -\frac{1}{2}\le x<0\\ \sqrt{1-\sqrt{1-x}} & ; \quad 0\le x\le 1\end{cases}$$

$$\Rightarrow (fof)(x)=\begin{cases}4x+3 & ; \quad -1\le x<-\frac{1}{2}\\ \sqrt{-2x} & ; \quad -\frac{1}{2}\le x\le 0\\ \sqrt{1-\sqrt{1-x}} & ; \quad 0\le x\le 1\end{cases}$$

بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع f روی آن اکیداً نزولی است، بازه $[-\frac{1}{2}\ ,\ 0]$ است. در نتیجه بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{1}{2}$ است.

۴

گزینه «۲»

$$\text{نکته}: \tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\,.\,\cos\beta}$$

براساس نکتهٔ فوق، سمت چپ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\tan x+\tan ۳x=\frac{\sin ۴x}{\cos x\cos ۳x}=\frac{۲\sin ۲x\cos ۲x}{\cos x\cos ۳x}$$

حال معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{۲\sin ۲x\cos ۲x}{\cos x\cos ۳x}=۴\sin ۲x\Rightarrow\begin{cases}\sin ۲x=۰ & (I)\\ \dfrac{\cos ۲x}{\cos x\cos ۳x}=۲ & (II)\end{cases}$$

$$(I)\ \sin ۲x=۰\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\qquad (*)$$

همهٔ جواب‌های (*) قابل قبول نیستند و آن‌هایی که $\cos x$ و $\cos ۳x$ را صفر می‌کنند باید کنار گذاشته شوند، پس فقط مضارب زوج $\frac{\pi}{۲}$ را قبول می‌کنیم، یعنی:

$$x=k\pi\xrightarrow{۰\le x\le\pi}x=۰\ ,\ \pi\ (\text{دو جواب})$$

$$(II)\quad\frac{\cos ۲x}{\cos x\cos ۳x}=۲\Rightarrow\cos(۳x-x)=۲\cos x\cos ۳x$$

$$\Rightarrow\cos ۳x\cos x+\sin ۳x\sin x=۲\cos x\cos ۳x$$

$$\Rightarrow\cos ۳x\cos x-\sin ۳x\sin x=۰\Rightarrow\cos(۳x+x)=۰$$

$$\Rightarrow\cos ۴x=۰\Rightarrow ۴x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۸}$$

$$\xrightarrow{۰\le x\le\pi}x=\frac{\pi}{۸}\ ,\ \frac{۳\pi}{۸}\ ,\ \frac{۵\pi}{۸}\ ,\ \frac{۷\pi}{۸}\ (\text{چهار جواب})$$

در نتیجه معادلهٔ صورت سؤال، ۶ جواب در بازهٔ $[۰\ ,\ \pi]$ دارد.

۵

گزینه «۲»

با توجه به فرض و مطابق شکل داریم:

$$\begin{cases}\tan(\alpha+\theta)=\dfrac{۶}{x}\Rightarrow\dfrac{\tan\alpha+\tan\theta}{۱-\tan\alpha\tan\theta}=\dfrac{۶}{x}\\ \tan\alpha=\dfrac{۱}{x}\quad,\quad\tan\theta=\dfrac{۱۰}{۱۱}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{\dfrac{۱}{x}+\dfrac{۱۰}{۱۱}}{۱-\dfrac{۱۰}{۱۱x}}=\frac{۶}{x}\Rightarrow\frac{۱۱+۱۰x}{۱۱x-۱۰}=\frac{۶}{x}\Rightarrow ۱۱x+۱۰x^۲=۶۶x-۶۰$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۱۱x+۱۲=۰\Rightarrow(x-۴)(۲x-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{۳}{۲}\\ x=۴\end{cases}$$

۶

گزینه «۲»

به کمک رابطهٔ $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$، معادله را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$4\tan^2\theta+2=\frac{7}{\cos\theta}\Rightarrow 4\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)+2=\frac{7}{\cos\theta}$$

$$\xrightarrow{\cos\theta=t}4\left(\frac{1}{t^2}-1\right)+2=\frac{7}{t}\xrightarrow{\text{ضرب در } t^2}4-2t^2=7t$$

$$\Rightarrow 2t^2+7t-4=0$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49-4(2)(-4)}}{4}=\frac{-7\pm 9}{4}=\frac{1}{2}\ \text{یا}\ -4$$

t یا همان $cos\theta$ که نمی‌تواند برابر ۴- باشد، پس داریم:

$$\cos\theta=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow\theta=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

$$\xrightarrow{0\le\theta\le 2\pi}\begin{cases}\theta_1=\dfrac{\pi}{3}\\ \theta_2=2\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{3}\end{cases}$$

اختلاف جواب‌ها برابر است با:

$$\theta_2-\theta_1=\frac{4\pi}{3}$$

۷

گزینه «۲»

$$2T=\frac{9\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\Rightarrow 2T=\pi\Rightarrow T=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{|b|}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow|b|=2$$

چون در همسایگی صفر تابع نزولی است، پس $b<0$ است (چرا؟)، یعنی $b=-2$.

$$f(x)=a-\tan 2x\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{8}\right)=0\Rightarrow a-\tan\frac{\pi}{4}=0\Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow f(x)=1-\tan 2x$$

$$(a-b)\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}\Rightarrow f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=1-\tan 2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$=1-\tan\frac{3\pi}{4}=1-(-1)=2$$

۸

گزینه «۲»

حد داده شده به ازای $x\to 2$ برابر $+\infty$ شده، پس مخرج کسر معادل با یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم با ریشهٔ مضاعف $x=2$ است، یعنی:

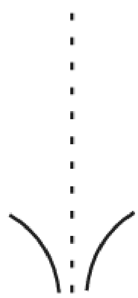
$$\lim_{x\to 2}\frac{a+1}{-x^2+4x-a^2}=+\infty\Rightarrow -x^2+4x-a^2\equiv-(x-2)^2$$

$$\Rightarrow a^2=4\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ a=-2\end{cases}$$

(دح باوج تروص نیا رد $\infty -$ دوش یم) ق ق غ
ق ق

در نتیجه:

$$f(x)=\frac{-2+2x}{|x|}\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=-\infty$$



۹

گزینه «۱»

داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}[\frac{۱+۲x}{۲+x^۲}]+\lim_{x\to-\infty}[\frac{۱+۲x}{۲+x}] = \lim_{x\to-\infty}[\frac{۲x}{x^۲}]+\lim_{x\to-\infty}[\frac{۲(۲+x)-۳}{۲+x}]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}[\frac{۲}{x}]+\lim_{x\to-\infty}[۲-\frac{۳}{x+۲}]=[\frac{۲}{-\infty}]+[۲-۰^-]=[۰^-]+[۲^+]=-۱+۲=۱$$

۱۰

گزینه «۱»

مجانب افقی تابع عبارتست از:

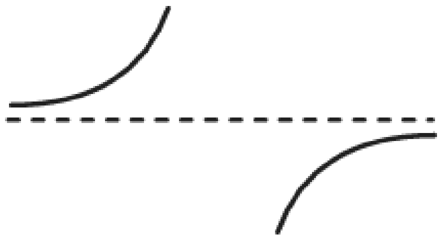
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۲+ax+۳}{x^۲+۴x+۱}=۲\Rightarrow y=۲$$

برای بررسی وضعیت نمودار تابع اطراف مجانب افقی، تابع $g(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x)=\frac{۲x^۲+ax+۳}{x^۲+۴x+۱}-۲=\frac{(a-۸)x+۱}{x^۲+۴x+۱}$$

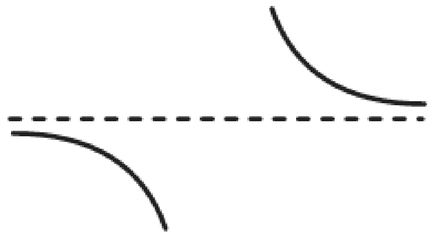
به ازای $a=۸$ داریم $g(x)=\frac{۱}{x^۲+۴x+۱}$ که به ازای $x\to\pm\infty$ نمودار تابع بالای مجانب افقی قرار دارد، که قابل قبول نیست. به ازای $(a-۸)<۰$ داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(a-۸)x}{x^۲}=۰$$



$$\begin{cases} x\to+\infty : g(x)=\dfrac{(a-۸)x+۱}{x^۲+۴x+۱}<۰ \\ x\to-\infty : g(x)=\dfrac{(a-۸)x+۱}{x^۲+۴x+۱}>۰ \end{cases}$$

در نتیجه $a<۸$ و هفت مقدار طبیعی برای عدد a قابل قبول است. تذکر: به ازای $a>۸$ نمودار تابع اطراف مجانب افقی خود به صورت زیر می‌شود:



۱۱

گزینه «۴»

فرض کنید $y=b$ مجانب افقی نمودار تابع f در $+\infty$ باشد، در نتیجه داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x-۲)=b\ ,\quad \lim_{x\to+\infty}f(۲x)=b$$

بنابراین طبق فرض داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳f(x-۲)}{f(۲x)+۲}=۲$$

$$\Rightarrow\frac{۳\lim_{x\to+\infty}f(x-۲)}{\lim_{x\to+\infty}(f(۲x)+۲)}=۲\Rightarrow\frac{۳b}{b+۲}=۲$$

$$\Rightarrow ۳b=۲b+۴\Rightarrow b=۴$$

---

۱۲ گزینه «۲»

معادله مجانب‌های قائم تابع تانژانت به صورت $x = (۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$ است $(k \in \mathbb{Z})$. بنابراین داریم:

$$\frac{۲\pi}{x+۱} = (۲k+۱)\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x+۱ = \frac{۴}{۲k+۱} \Rightarrow x = \frac{۴}{۲k+۱} - ۱$$

$$D_f = (\frac{۱}{۳}\ ,\ ۳) \Rightarrow \frac{۱}{۳} \leq \frac{۴}{۲k+۱} - ۱ \leq ۳$$

$$\frac{۴}{۳} \leq \frac{۴}{۲k+۱} \leq ۴ \Rightarrow \frac{۱}{۳} \leq \frac{۱}{۲k+۱} \leq ۱ \Rightarrow ۱ \leq ۲k+۱ \leq ۳$$

$$۰ \leq ۲k \leq ۲ \Rightarrow ۰ \leq k \leq ۱ \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

در نتیجه نمودار تابع دو مجانب قائم دارد.

---

۱۳ گزینه «۲»

تابع $h(x) = f(x) - ۲g(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\xrightarrow{\div ۵} ۰/۲\Delta H_{(N\equiv N)} + ۰/۶\Delta H_{(H-H)} = ۴۴۹/۶kJ$$

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x^{\frac{-۷}{۶}} \Rightarrow h'(۱) = f'(۱) - ۲g'(۱) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

---

۱۴ گزینه «۱»

در بازه $[۰, a]$، ضابطه تابع f به صورت $f(x) = \sqrt[۳]{x^۲}(a-x)$ می‌شود، پس:

$$f(x) = ax^{\frac{۲}{۳}} - x^{\frac{۵}{۳}} \Rightarrow f'(x) = \frac{۲}{۳}ax^{-\frac{۱}{۳}} - \frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}} = x^{-\frac{۱}{۳}}(\frac{۲a}{۳} - \frac{۵x}{۳}) = ۰$$

$$\xrightarrow{f'(x)=۰} \frac{۲a}{۳} - \frac{۵x}{۳} = ۰ \Rightarrow x = \frac{۲a}{۵}$$

ماکزیمم مطلق تابع f در بازه $[۰, a]$ در یکی از نقاط $x = ۰$، $x = a$ یا $x = \frac{۲a}{۵}$ اتفاق می‌افتد:

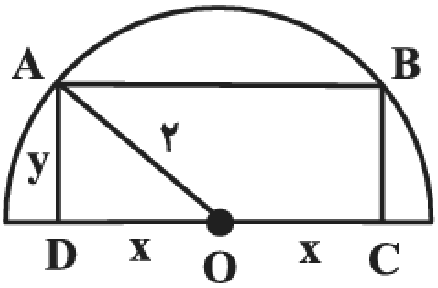
$$\begin{cases} f(۰) = ۰ \\ f(a) = ۰ \\ f(\frac{۲a}{۵}) = \sqrt[۳]{(\frac{۲a}{۵})^۲}(\frac{۳a}{۵}) \end{cases} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt[۳]{(\frac{۲a}{۵})^۲} = \frac{۵}{۲a} \Rightarrow (\frac{۲a}{۵})^{\frac{۵}{۳}} = ۱ \Rightarrow \frac{۲a}{۵} = ۱$$

$$\Rightarrow a = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

گزینه «۱»

مطابق شکل، طول ضلعCD را$2x$ و طول ضلعAD راy می‌گیریم. بنابر تقارن موجود در شکل، $OC = OD = x$ (O مرکز نیم‌دایره است.) می‌باشد. طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلثOAD داریم:



$$x^2 + y^2 = 2^2 \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \xrightarrow{y>0} y = \sqrt{4 - x^2}$$

تابع مساحت مستطیل$ABCD$ به صورت زیر می‌شود:

$$f(x) = 2xy = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

از آنجا که$0 < x < 2$، بیشترین مساحت ممکن برای مستطیل$ABCD$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f'(x) = 2\sqrt{4 - x^2} + 2x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{4 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Rightarrow \frac{2(4 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 8 \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{2}$$

در نتیجه بیشترین مقدار مساحت مورد نظر به ازای$x = \sqrt{2}$ به دست می‌آید که در آن صورت داریم:

$$y = \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$$

و محیط این مستطیل برابر می‌شود با:

$$2(2x + y) = 6\sqrt{2}$$

گزینه «۴» ۱۶

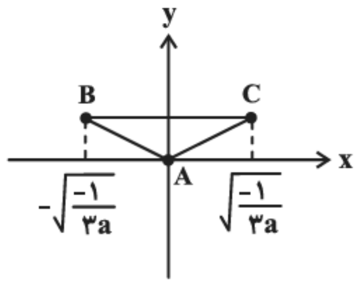
تابع f را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = |x|(ax^۲ + ۱) = \begin{cases} ax^۳ + x & , \quad x \geq ۰ \\ -ax^۳ - x & , \quad x < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۳ax^۲ + ۱ & , \quad x > ۰ \\ -۳ax^۲ - ۱ & , \quad x < ۰ \end{cases}$$

$x = ۰$ نقطهٔ بحرانی تابع f است چون $f'_+(۰) \neq f'_-(۰)$. همچنین نقاط بحرانی‌ای که مشتق تابع f به ازای آن‌ها صفر است را می‌یابیم:

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{۱}{۳a}} \Rightarrow f(\pm\sqrt{-\frac{۱}{۳a}}) = \frac{۲}{۳}\sqrt{-\frac{۱}{۳a}}$$



با توجه به نمودار تابع f، مساحت مثلث ABC به صورت زیر می‌شود:

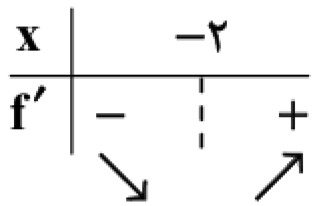
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times (\frac{۲}{۳}\sqrt{-\frac{۱}{۳a}}) \times (۲\sqrt{-\frac{۱}{۳a}}) = \frac{۲}{۳}(-\frac{۱}{۳a})$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}: S_{ABC} = \frac{۱}{۱۸}} \frac{۲}{۳}(-\frac{۱}{۳a}) = \frac{۱}{۱۸} \Rightarrow a = -۴$$

گزینه «۱» ۱۷

$$f'(x) = \frac{-(۲x + ۴)(a - ۱۰)}{(x^۲ + ۴x + a)^۲} = \frac{(۱۰ - a)(۲x + ۴)}{(x^۲ + ۴x + a)^۲}$$

$x = -۲$ ریشهٔ تابع f' است پس همین نقطه باید min نسبی تابع باشد و برای این‌که این نقطه min نسبی باشد، باید جدول تغییرات f به صورت زیر باشد:



پس $۱۰ - a > ۰$ و در نتیجه $a < ۱۰$.

با توجه به این‌که صورت کسر $f(x)$، منفی است اگر مخرج کسر تابع f، ریشهٔ ساده یا مضاعف داشته باشد، در حداقل یکی از طرفین ریشه‌ها، مخرج کسر برابر $(-\infty)$ می‌شود که در این صورت min مطلق ندارد، در نتیجه مخرج کسر ریشه ندارد و داریم:

$$\Delta\ (\text{مخرج}) < ۰ \Rightarrow ۱۶ - ۴a < ۰ \Rightarrow a > ۴$$

پس $۴ < a < ۱۰$ است. اما دقت کنید اگر $a = ۱۰$ باشد، آن گاه تابع $f(x)$ به تابع ثابت $f(x) = ۰$ تبدیل خواهد شد که همهٔ نقاط آن هم min نسبی و هم min مطلق هستند، پس $۴ < a \leq ۱۰$ و در نتیجه حداکثر و حداقل مقدار صحیح a به ترتیب ۱۰ و ۵ خواهد بود.

$$a_{\max} + a_{\min} = ۱۰ + ۵ = ۱۵$$

۱۸
گزینه «۲»

راه‌حل اول: ضابطهٔ تابع هموگرافیک $y=f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{y-۳}=۱-\frac{۱}{x-۲}\Rightarrow\frac{۱}{y-۳}=\frac{x-۲-۱}{x-۲}\Rightarrow\frac{۱}{y-۳}=\frac{x-۳}{x-۲}$$

$$\Rightarrow y-۳=\frac{x-۲}{x-۳}\Rightarrow y=\frac{x-۲}{x-۳}+۳$$

مجانب‌های قائم و افقی تابع f به صورت زیر می‌شود:

(مجانب قائم) $x-۳=۰\Rightarrow x=۳$

(مجانب افقی) $\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}(\frac{x-۲}{x-۳}+۳)=۱+۳=۴\Rightarrow y=۴$

نقطهٔ $(۳\ ,\ ۴)$ برخورد مجانب‌ها است.

راه‌حل دوم:

$$\begin{cases}(x\to\pm\infty):۰+\dfrac{۱}{y-۳}=۱\Rightarrow y=۴ & \text{مجانب افقی}\\(y\to\pm\infty):\dfrac{۱}{x-۲}+۰=۱\Rightarrow x=۳ & \text{مجانب قائم}\end{cases}\Rightarrow(۳\ ,\ ۴)$$

۱۹
گزینه «۲»

از روی ماتریس A، ماتریس‌های $A^۲$ و $A^۳$ را می‌یابیم:

$$A=\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix}۱&-۷\\۱&۲\end{bmatrix}\Rightarrow A^۲=\frac{۱}{۹}\begin{bmatrix}۱&-۷\\۱&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۷\\۱&۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^۲=\frac{۱}{۹}\begin{bmatrix}-۶&-۲۱\\۳&-۳\end{bmatrix}$$

$$A^۳=A^۲\times A=\frac{۱}{۲۷}\begin{bmatrix}-۶&-۲۱\\۳&-۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۷\\۱&۲\end{bmatrix}=\frac{۱}{۲۷}\begin{bmatrix}-۲۷&۰\\۰&-۲۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}=-I$$

در نتیجه:

$$A^{۱۴۰۴}=(A^۳)^{۴۶۸}=(-I)^{۴۶۸}=I$$

مجموع درایه‌های $A^{۱۴۰۴}$ برابر ۲ می‌شود.

۲۰
گزینه «۲»

نکته: برای دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبهٔ A و B که وارون‌پذیرند، داریم:

$$A+B=A(A^{-۱}+B^{-۱})B$$

طبق فرض داریم:

$$|A+B|=-۳|A^{-۱}+B^{-۱}|$$

$$\Rightarrow|A(A^{-۱}+B^{-۱})B|=-۳|A^{-۱}+B^{-۱}|$$

$$\Rightarrow|AB|\times|A^{-۱}+B^{-۱}|=-۳|A^{-۱}+B^{-۱}|$$

$$\xrightarrow{|A^{-۱}+B^{-۱}|\neq ۰}|AB|=-۳\Rightarrow|A||B|=-۳$$

از طرفی $|A|+|B|=۲$، پس مقادیر $|A|$ و $|B|$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیر هستند:

$$x^۲-۲x-۳=۰\Rightarrow(x-۳)(x+۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۳\\x=-۱\end{cases}\Rightarrow\frac{۱}{|A|}+\frac{۱}{|B|}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{-۱}=-\frac{۲}{۳}$$

---

۲۱ گزینه «۲»

طبق فرض داریم:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} = I - ۲X$$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} + ۲I \right) X = I - \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۰ & -۴ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

حال باید وارون ماتریس $\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ را از سمت چپ در طرفین ضرب کنیم:

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۰ & -۴ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow X = \frac{۱}{۱} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & -۴ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} ۲ & -۶ \\ -۸ & ۲۰ \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های X برابر ۸ است.

---

۲۲ گزینه «۳»

اگر $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ معادلهٔ گستردهٔ دایره باشد، آن‌گاه مختصات نقاط داده شده را در آن جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A(۱\ ,\ ۱) \Rightarrow ۱ + ۱ + a + b + c = ۰ \qquad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} B(-۱\ ,\ ۰) \Rightarrow ۱ + ۰ - a + ۰ + c = ۰ \Rightarrow a = ۱ + c \\ C(۰\ ,\ ۱) \Rightarrow ۰ + ۱ + ۰ + b + c = ۰ \Rightarrow b = -c - ۱ \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{(۱)} ۲ + ۱ + c - c - ۱ + c = ۰ \Rightarrow c = -۲$$

$$\Rightarrow a = -۱\ ,\quad b = ۱$$

در نتیجه، شعاع دایره برابر می‌شود با:

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱ + ۱ + ۸} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$$

$\Rightarrow$ مساحت دایره : $S = \pi R^۲ = \dfrac{\pi(۱۰)}{۴} = \dfrac{۵\pi}{۲}$

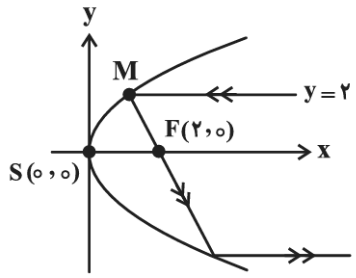
۲۳

گزینه «۴»

سهمی داده شده، افقی و دهانهٔ آن رو به راست باز می‌شود و داریم:

$$y^{۲}=۸x \Rightarrow \begin{cases} ۴a=۸ \Rightarrow a=۲ \\ \text{رأس}: S(۰,۰) \end{cases} \Rightarrow \text{کانون}: F(۲,۰)$$

مطابق شکل زیر، در بازتاب اول، پرتوی انعکاس از کانون سهمی گذشته و در بازتاب دوم، پرتوی انعکاس موازی محورxها (محور سهمی) خواهد بود.



داریم:

$$\begin{cases} y=۲ \\ y^{۲}=۸x \end{cases} \Rightarrow ۴=۸x \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases} M(\frac{۱}{۲}\ ,\ ۲) \\ F(۲\ ,\ ۰) \end{cases} \Rightarrow MF\ \ \text{شیب خط}: m=\frac{۲-۰}{\frac{۱}{۲}-۲}=-\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow MF: y=-\frac{۴}{۳}(x-۲)$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{-۳y+۸}{۴} \\ y^{۲}=۸x \end{cases} \Rightarrow y^{۲}=۸(\frac{۸-۳y}{۴})$$

$$\Rightarrow \underbrace{y^{۲}+۶y-۱۶}_{(y+۸)(y-۲)}=۰ \Rightarrow \begin{cases} y=۲ \\ y=-۸ \end{cases}$$

۲۴

گزینه «۲»

بلندترین میانه، میانه وارد بر کوتاه‌ترین ضلع است. طول اضلاع مثلث را پیدا می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{۱+۱+۱}=\sqrt{۳}$$

$$AC=\sqrt{۴+۱+۱}=\sqrt{۶}$$

$$BC=\sqrt{۱+۴+۴}=۳$$

بلندترین میانه، متناظر با کوتاه‌ترین ضلع (یعنیAB) است. نقطهٔM، وسط ضلعAB به صورت$M(\frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{۵}{۲}\ ,\ -\frac{۳}{۲})$ است و طول میانهCM برابر می‌شود با:

$$CM=\sqrt{(-۱-\frac{۱}{۲})^{۲}+(۱-\frac{۵}{۲})^{۲}+(۰+\frac{۳}{۲})^{۲}} \Rightarrow CM=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

۲۵

گزینه «۳»

با توجه به فرض داریم:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{۱۲}{۴\times ۶}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{۳}$$

در این صورت مساحت مثلث بنا شده توسط دو بردار$\vec{a}$ و$\vec{b}$ برابر می‌شود با:

$$S=\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{۱}{۲}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۶\sqrt{۳}$$

۲۶

گزینه «۴»

اگر سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه باشند آن‌گاه حجم متوازی‌السطوح تولید شده توسط سه بردار برابر صفر می‌شود، پس:

$$\begin{vmatrix} m & -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & m & -۲ \end{vmatrix} = ۰ \xrightarrow{\text{نسبت به سطر اول}}$$

$$m\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ m & -۲ \end{vmatrix} - (-۱)\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ \end{vmatrix} + ۱\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & m \end{vmatrix} = \underbrace{-m^۲ + ۳m - ۲}_{-(m-۱)(m-۲)} = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_۱ = ۱ \\ m_۲ = ۲ \end{cases} \Rightarrow |m_۲ - m_۱| = ۱$$

۲۷

گزینه «۲»

ابتدا به دنبال توانی از عدد ۵ می‌رویم که به پیمانهٔ ۱۱ با ۱ یا (۱-) همنهشت است:

$$۵^۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۲۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۳ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۵^۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۹ \overset{۱۱}{\equiv} -۲ \xrightarrow{\times ۵} ۵^۵ \overset{۱۱}{\equiv} -۱۰ \overset{۱۱}{\equiv} ۱$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۷}} ۵^{۳۵} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۵^۲} ۵^{۳۷} \overset{۱۱}{\equiv} ۲۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۳$$

حال توانی از عدد ۹ را می‌یابیم که به پیمانهٔ ۱۱ با ۱ یا (۱-) همنهشت است:

$$۹ \overset{۱۱}{\equiv} -۲ \xrightarrow{\text{به توان ۵}} ۹^۵ \overset{۱۱}{\equiv} -۳۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۱$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۷}} ۹^{۳۵} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۹^۲} ۹^{۳۷} \overset{۱۱}{\equiv} (-۲)^۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۴$$

در نتیجه:

$$۵^{۳۷} + ۹^{۳۷} \overset{۱۱}{\equiv} ۳ + ۴ = ۷$$

پس باقی ماندهٔ تقسیم برابر با ۷ است.

۲۸

گزینه «۳»

طبق فرض، تقسیم مورد نظر به صورت زیر است:

$$a = ۳۱۹q + q^۲ \xrightarrow{۰ \le r < b} ۰ \le q^۲ < ۳۱۹ \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} ۱ \le q \le ۱۷$$

$$\begin{cases} a = ۳۱۹q + q^۲ \\ \text{فرض}: a = ۷K \end{cases} \Rightarrow ۷k = ۳۱۹q + q^۲$$

$$\xrightarrow{\text{به پیمانه ۷}} ۰ \overset{۷}{\equiv} ۴q + q^۲ \Rightarrow q(q+۴) \overset{۷}{\equiv} ۰$$

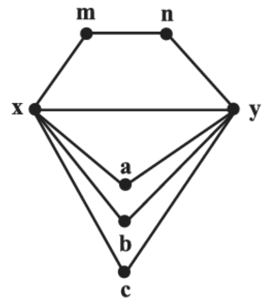
$$\Rightarrow \begin{cases} q \overset{۷}{\equiv} ۰ \Rightarrow q = ۷t \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{یا} \\ q + ۴ \overset{۷}{\equiv} ۰ \Rightarrow q \overset{۷}{\equiv} -۴ \overset{۷}{\equiv} ۳ \Rightarrow q = ۷t + ۳ \end{cases}$$

چون $۱ \le q \le ۱۷$، پس پنج عدد ۷ , ۱۴ , ۳ , ۱۰ , ۱۷ قابل قبول هستند.

۲۹

گزینه «۱»

نمودار این گراف با شرایط داده شده، تنها به یک روش رسم می‌شود. یعنی از این گراف فقط یک نوع وجود دارد. (اصطلاحاً تکریخت است.)



این گراف فقط دورهایی به طول ۳، ۴ و ۵ دارد. دورهای به طول ۳ در این گراف عبارتند از:

$$xayx\ ,\ xbyx\ ,\ xcyx$$

دورهای به طول ۵ در این گراف عبارتند از:

$$xmnyax\ ,\ xmnybx\ ,\ xmnycx$$

بنابراین گراف G در مجموع ۶ دور به طول فرد دارد.

۳۰

گزینه «۲»

برای سادگی از نمادهای Δ' و δ' برای گراف مکمل استفاده می‌کنیم. طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} \Delta + \delta = ۱۱ \\ \Delta' + \Delta = ۱۸ \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\Delta + \delta' = \Delta' + \delta = p - ۱$$

بنابراین:

$$\Delta' + \Delta = (p-۱) - \delta + \Delta = ۱۸ \xrightarrow{p=۱۴} \Delta - \delta = ۱۸ - ۱۳ = ۵$$

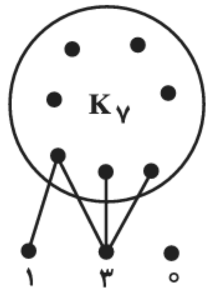
$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta + \delta = ۱۱ \\ \Delta - \delta = ۵ \end{cases} \Rightarrow \Delta = ۸\ ,\quad \delta = ۳$$

حداکثر اندازهٔ G با شرایط $p = ۱۴$، $\delta = ۳$ و $\Delta = ۸$ زمانی اتفاق می‌افتد که گراف ۱۲ رأس از درجهٔ $\Delta = ۸$، یک رأس از درجهٔ ۷ و یک رأس از درجهٔ $\delta = ۳$ داشته باشد. این گراف وجود دارد و اندازهٔ آن برابر است با: $۲q = ۱۲ \times ۸ + ۷ + ۳ = ۱۰۶ \Rightarrow q_{\max} = ۵۳$

گزینه «۲» ۳۱

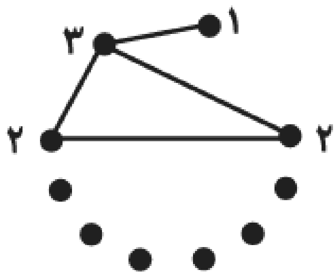
برای حداکثر شدن اندازهٔ گراف، ابتدا سه رأس را کنار گذاشته و با هفت رأس دیگر، گراف کامل درست می‌کنیم. سپس یک رأس بیرون را به یکی از هفت رأسی که گراف کامل ساختیم وصل می‌کنیم و سپس از آن رأس دومی که بیرون قرار گرفته بود به ۳ رأس از هفت رأس گراف کامل وصل می‌کنیم که در این وضعیت، حداکثر اندازه برابر است با:

$$q_{\max} = \binom{۷}{۲} + ۳ + ۱ = ۲۵$$



برای شمارش حداقل اندازهٔ گراف، کافی است یک رأس از درجهٔ ۳ داشته باشیم. در این وضعیت سه رأس از درجهٔ ۱ داریم و برای آن‌که فقط یک رأس از درجهٔ ۱ داشته باشیم، کافی است دو تا از رأس‌های درجهٔ ۱ را به هم وصل کنیم، پس:

$$q_{\min} = ۳ + ۱ = ۴$$



در نتیجه:

$$q_{\max} - q_{\min} = ۲۵ - ۴ = ۲۱$$

گزینه «۲» ۳۲

ابتدا ۳ نفر از ۸ نفر را برای اتاق ۳ نفره و سپس ۴ نفر از ۵ نفر باقی‌مانده را برای اتاق ۴ نفره انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۸}{۳} \times \binom{۵}{۴} = ۵۶ \times ۵ = ۲۸۰$$

توجه کنید که نفر آخر به ۱ حالت در اتاق یک نفره قرار می‌گیرد.

گزینه «۱» ۳۳

فرض کنید مجموعه‌های $A_۱$ و $A_۲$ شامل رمزهایی باشد که به ترتیب فاقد ۱ و ۲ هستند. در این صورت داریم:

$$|S| = ۶ \times ۶ \times ۶ \times ۶ = ۶^۴ = ۱۲۹۶$$

$$|A_۱| = |A_۲| = ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ = ۵^۴ = ۶۲۵$$

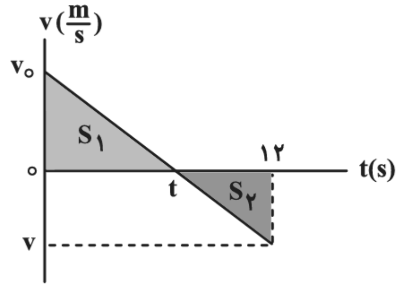
$$|A_۱ \bigcap A_۲| = ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ = ۴^۴ = ۲۵۶$$

تعداد رمزهایی که حداقل یک رقم ۱ و یک رقم ۲ را شامل می‌شوند، برابر تعداد اعضای مجموعهٔ $|\bar{A}_۱ \bigcap \bar{A}_۲|$ است، بنابراین داریم:

$$|\bar{A}_۱ \bigcap \bar{A}_۲| = |S| - |A_۱ \bigcup A_۲| = ۱۲۹۶ - (۶۲۵ + ۶۲۵ - ۲۵۶) = ۳۰۲$$

گزینه «۴»

متحرک در مبدأ زمان در جهت محور x حرکت می‌کند. بنابراین سرعت اولیهٔ آن مثبت است. همچنین چون تندی متوسط متحرک در ۱۲ ثانیهٔ اول حرکت از اندازهٔ سرعت متوسط آن در این ۱۲s بیشتر است، پس متحرک در این مدت تغییر جهت می‌دهد و نمودار سرعت- زمان متحرک به صورت زیر است:



مسافت و جابه‌جایی متحرک در مدت ۱۲s را حساب می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow \frac{۱۰}{۳} = \frac{\ell}{۱۲} \Rightarrow \ell = ۴۰\, m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow ۲ = \frac{\Delta x}{۱۲} \Rightarrow \Delta x = ۲۴\, m$$

اکنون مقادیر $S_۱$ و $S_۲$ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} S_۱ + S_۲ = ۴۰ \\ S_۱ - S_۲ = ۲۴ \end{cases} \Rightarrow ۲S_۱ = ۶۴ \Rightarrow S_۱ = ۳۲\ ,\ \ S_۲ = ۸$$

به کمک نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه، داریم:

$$\frac{S_۱}{S_۲} = (\frac{t-۰}{۱۲-t})^۲ \Rightarrow \frac{۳۲}{۸} = (\frac{t}{۱۲-t})^۲$$

$$\Rightarrow ۲ = \frac{t}{۱۲-t} \Rightarrow t = ۸\, s$$

در پایان با استفاده از مساحت $S_۲$، سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۱۲\, s$ را به‌دست می‌آوریم:

$$S_۲ = ۸ \Rightarrow \frac{(۱۲-۸)|v|}{۲} = ۸ \Rightarrow ۴|v| = ۱۶$$

$$\Rightarrow |v| = ۴\frac{m}{s} \xrightarrow{v<۰} \vec{v} = (-۴\frac{m}{s})\,\vec{i}$$

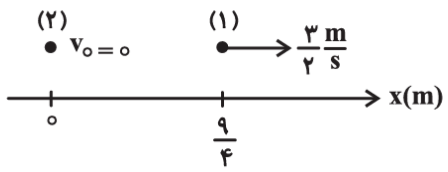
۳۵ گزینه «۱»

ابتدا با استفاده از معادلات $x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_. t + x_.$ و $v = at + v_.$ مکان و سرعت متحرک اول را پس از ۳ ثانیه می‌یابیم:

$$x_۱ = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times ۳^۲ + ۰ \times ۳ + ۰ = \frac{۹}{۴} m$$

$$v_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۳ + ۰ = \frac{۳}{۲} \frac{m}{s}$$

حال $x_۱$ و $v_۱$ را به عنوان مکان و سرعت اولیه متحرک (۱) هنگامی که متحرک (۲) از $x_. = ۰$ شروع به حرکت می‌کند در نظر گرفته و داریم:



$$\begin{cases} x'_۱ = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} t^۲ + \frac{۳}{۲} t + \frac{۹}{۴} \\ x_۲ = \frac{۱}{۲} \times ۲t^۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_۱ = \frac{t^۲}{۴} + \frac{۳}{۲} t + \frac{۹}{۴} \\ x_۲ = t^۲ \end{cases}$$

حال لحظه‌ای که دو متحرک به یکدیگر می‌رسند را می‌یابیم:

$$x'_۱ = x_۲ \Rightarrow \frac{t^۲}{۴} + \frac{۳}{۲} + \frac{۹}{۴} = t^۲ \Rightarrow \frac{۳}{۴} t^۲ - \frac{۳}{۲} t - \frac{۹}{۴} = ۰$$

غ ق ق

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -۱\, s \\ t = ۳\, s \end{cases}$$

ق ق

از لحظه‌ای که سرعت دو متحرک یکسان می‌شود تا لحظه‌ای که به هم می‌رسند، فاصله آن‌ها کاهش می‌یابد:

$$\begin{cases} v_۱ = \frac{۱}{۲} t + \frac{۳}{۲} \\ v_۲ = ۲t \end{cases} \Rightarrow v_۱ = v_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲} t + \frac{۳}{۲} = ۲t \Rightarrow t = ۱\, s$$

بنابراین بازه زمانی مد نظر سوال از $t_۱ = ۱\, s$ (لحظه برابر سرعت‌ها) تا $t_۲ = ۳\, s$ (لحظه به هم رسیدن) می‌باشد:

$$\Delta t = t_۲ - t_۱ = ۳ - ۱ = ۲\, s$$

---

۳۶ گزینه «۴»

لحظه رها شدن گلوله سوم، $t = ۴\, s$ می‌باشد که گفته شده گلوله اول در این لحظه به زمین رسیده است. بنابراین می‌توان h را حساب کرد:

$$\Delta y = \frac{۱}{۲} t^۲ \xrightarrow[\Delta y = h]{t = ۴\, s} h = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۴^۲ = ۸۰\, m$$

لحظه رها شدن گلوله دوم $t = ۲\, s$ می‌باشد، بنابراین هنگامی‌که گلوله اول به زمین می‌رسد، گلوله دوم ۲ ثانیه از رها شدنش گذشته است و می‌توانیم جابه‌جایی آن و سپس ارتفاعش از زمین را حساب کنیم:

برای گلوله دوم $\Delta y = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۲^۲ = ۲۰\, m$

$$h' = h - \Delta y = ۸۰ - ۲۰ = ۶۰\, m$$

۳۷

گزینه «۱»

ابتدا کل زمان سقوط را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta y=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}\Rightarrow -۶۴/۸=-\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times t^{۲}\Rightarrow t=۳/۶\,s$$

جابه‌جایی متحرک را در $۳/۶-۲=۱/۶\,s$ ابتدای حرکتش محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta y=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}\Rightarrow \Delta y=-\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times ۱/۶^{۲}=-۱۲/۸\,m$$

مسافت در $۲\,s$ آخر حرکت برابر است با:

$$۶۴/۸-۱۲/۸=۵۲\,m$$

۳۸

گزینه «۲»

$$\left.\begin{aligned} v_B^{۲}-v_A^{۲}=۲a(x_B-x_A)\\ v_C^{۲}-v_A^{۲}=۲a(x_C-x_A)\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{v_B^{۲}-v_A^{۲}}{v_C^{۲}-v_A^{۲}}=\frac{r}{\frac{۸r}{۹}}$$

$$\Rightarrow \frac{۸}{۹}v_B^{۲}-\frac{۸}{۹}v_A^{۲}=v_C^{۲}-v_A^{۲}$$

$$\Rightarrow v_C^{۲}=\frac{۸}{۹}v_B^{۲}+\frac{۱}{۹}v_A^{۲}=\frac{۱}{۹}(۸v_B^{۲}+v_A^{۲})$$

$$\Rightarrow v_C=\frac{۱}{۳}\sqrt{۸v_B^{۲}+v_A^{۲}}$$

۳۹

گزینه «۳»

با توجه به ثابت بودن جهت و اندازه نیرو شتاب وارد جسم را می‌یابیم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow a=\frac{F_{net}}{m}\xrightarrow[m=۸۰۰\;g=۰/۸\,kg]{F_{net}=۲N}a=\frac{۲}{۰/۸}=۲/۵\frac{m}{s^{۲}}$$

حال با توجه به ثابت بودن شتاب و رابطه شتاب متوسط داریم:

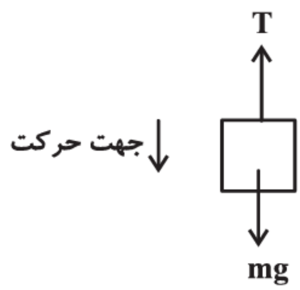
$$a=\frac{v_۲-v_۱}{\Delta t}\xrightarrow[v_۱=-۵\frac{m}{s}\;,\;v_۲=۵\frac{m}{s}]{a=۲/۵\frac{m}{s^{۲}}}۲/۵=\frac{۵-(-۵)}{\Delta t}\Rightarrow \Delta t=۴\,s$$

۴۰

گزینه «۴»

$$mg-T=ma\xrightarrow[T=۴۳۰\,N]{m=۵۰\,kg\;,\;g=۹/۸\frac{m}{s^{۲}}}۵۰\times ۹۸-۴۳۰=۵۰a$$

$$\Rightarrow ۶۰=۵۰a\Rightarrow a=۱/۲\frac{m}{s^{۲}}$$



۴۱

گزینه «۲»

ابتدا دوره تناوب و سرعت خطی حرکت را می‌یابیم:

$$T=\frac{t}{n}\xrightarrow[n=\text{۳ دور}]{t=۳/۱۴s}T=\frac{۳/۱۴}{۳}s$$

$$v=\frac{۲\pi r}{T}\xrightarrow[r=۰/۱\,m]{\pi=۳/۱۴\ ,\ T=\frac{۳/۱۴}{۳}s}v=\frac{۲\times ۳/۱۴\times ۰/۱}{\frac{۳/۱۴}{۳}}=۰/۶\frac{m}{s}$$

حال بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی را به عنوان نیروی مرکزگرا در نظر گرفته و داریم:

$$F_c=f_{s\,,\,\max}\Rightarrow\frac{mv^{۲}}{r}=\mu_s mg\Rightarrow\mu_s=\frac{v^{۲}}{rg}=\frac{(۰/۶)^{۲}}{۰/۱\times ۱۰}=۰/۳۶$$

۴۲

گزینه «۳»

در گام اول ابتدا از رابطهٔ $\Delta\vec{p}=m\Delta\vec{v}=\vec{F}\Delta t$ سرعت را در $t=۲\,s$ محاسبه می‌کنیم.

$$۲(\vec{v}_۲-(۱۰\,\vec{i}-۸\,\vec{j}))=(-۸\,\vec{i}+۶\,\vec{j})\times ۲\Rightarrow\vec{v}_۲=۲\,\vec{i}-۲\,\vec{j}$$

در گام دوم رابطهٔ $\Delta\vec{p}=\vec{F}\Delta t$ را برای نیروی $F_۲$ می‌نویسیم و تکانه در انتهای بازهٔ زمانی را به دست می‌آوریم:

$$\Delta\vec{p}=F_۲\Delta t\Rightarrow\vec{p}_۲-۲(۲\,\vec{i}-۲\,\vec{j})=(۲\,\vec{i}-۳\,\vec{j})\times ۴$$

$$\Rightarrow\vec{p}_۲=۱۲\,\vec{i}-۱۶\,\vec{j}$$

در گام سوم اندازهٔ $\vec{p}_۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$|p_۲|=\sqrt{۱۲^{۲}+۱۶^{۲}}=۲۰\frac{kg\,.\,m}{s}$$

۴۳

گزینه «۳»

رابطه‌های شتاب گرانش در سطح سیارهٔ مورد نظر(g_x) و شتاب گرانشی زمین در فاصلهٔ h از سطح زمین(g_e) را برحسب چگالی مادهٔ تشکیل‌دهندهٔ هر کدام می‌نویسیم:

$$g_x=\frac{GM_x}{R_x^{۲}}\xrightarrow{M_x=\rho_x V_x=\rho_x\times\frac{۴}{۳}\pi R_x^{۳}}g_x=G\rho_x\frac{۴}{۳}\pi R_x$$

$$g_e=\frac{GM_e}{(R_e+h)^{۲}}\xrightarrow{Me=\rho_e Ve=\rho_e\times\frac{۴}{۳}\pi R_e^{۳}}g_e=\frac{G\rho_e\frac{۴}{۳}\pi R_e^{۳}}{(R_e+h)^{۲}}$$

g_x و g_e را با یکدیگر برابر قرار می‌دهیم و رابطهٔ بین h و R_e را پیدا می‌کنیم:

$$g_x=g_e\Rightarrow G\rho_x\frac{۴}{۳}\pi R_x=\frac{G\rho_e\frac{۴}{۳}\pi R_e^{۳}}{(R_e+h)^{۲}}$$

$$\xrightarrow[R_x=\frac{۱}{۱۶}R_e]{\rho_x=۹\rho_e}۹\rho_e\times\frac{۱}{۱۶}R_e=\frac{\rho_e\times R_e^{۳}}{(R_e+h)^{۲}}$$

$$\Rightarrow\frac{۹}{۱۶}=\frac{R_e^{۲}}{(R_e+h)^{۲}}\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{R_e}{R_e+h}\Rightarrow ۴R_e=۳R_e+۳h$$

$$\Rightarrow R_e=۳h\Rightarrow h=\frac{R_e}{۳}$$

---

۴۴ گزینه «۳»

کافی است به کمک رابطهٔ $d = vt$، اختلاف زمانی دو موج رسیده به عقرب را نوشته و در نهایت فاصلهٔ طعمه(d) را به دست آوریم:

$$\Delta t = t_T - t_L = \frac{d}{v_T} - \frac{d}{v_L} = d(\frac{۱}{v_T} - \frac{۱}{v_L}) = d(\frac{v_L - v_T}{v_T v_L})$$

$$\xrightarrow[v_T=۴۰\frac{m}{s}\ ,\ v_L=۱۶۰\frac{m}{s}]{\Delta t=۶\,ms=۶\times۱۰^{-۳}s} ۶ \times ۱۰^{-۳} = d(\frac{۱۶۰ - ۴۰}{۱۶۰ \times ۴۰})$$

$$\Rightarrow d = ۰/۳۲\,m = ۳۲\,cm$$

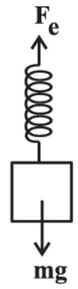
---

۴۵ گزینه «۲»

ابتدا ثابت فنر را در حالت اول حساب می‌کنیم.

$$F_e = mg \Rightarrow kx = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{x}$$

$$\xrightarrow[x=۲/۵\times۱۰^{-۲}m]{m=۰/۲\,kg\ ,\ g=۱۰\frac{m}{s^{۲}}} k = \frac{۰۲ \times ۱۰}{۲/۵ \times ۱۰^{-۲}} = ۸۰\frac{N}{m}$$



می‌دانیم در حرکت نوسانی بیشینه مقدار انرژی جنبشی همان مقدار انرژی مکانیکی است و داریم:

$$K_{\max} = E = \frac{۱}{۲}KA^{۲} \underset{A=۲\times۱۰^{-۲}m}{\overset{K=۸۰\frac{N}{m}}{=\!=\!=\!=}} \frac{۱}{۲} \times ۸۰ \times (۲ \times ۱۰^{-۲})^{۲} = ۱۶ \times ۱۰^{-۳}J = ۱۶\,mJ$$

---

۴۶ گزینه «۳»

این نوسانگر در هر نوسان کامل، مسافت$۴A$ را طی می‌کند، پس می‌توان نوشت:

$$۵(۴A) = ۲۰\,cm \Rightarrow A = ۱\,cm$$

این نوسانگر در مدت ۴ دقیقه،۱۲۰ بار طول پاره‌خط را طی می‌کند و نوسانگر هر دو بار که طول پاره‌خط را طی می‌کند، یک نوسان کامل انجام می‌دهد، پس تعداد نوسانات در مدت ۴ دقیقه،۶۰ نوسان می‌باشد. پس می‌توان نوشت:

$$n = ft \Rightarrow ۶۰ = f \times ۲۴۰ \Rightarrow f = \frac{۱}{۴}Hz$$

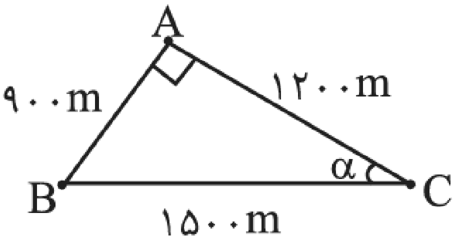
$$\omega = ۲\pi f = ۲\pi \times \frac{۱}{۴} = \frac{\pi}{۲}$$

$$x = A\cos\omega t \Rightarrow x = ۰/۰۱\cos(\frac{\pi}{۲}t)$$

۴۷

گزینه «۱»

$$\sin\alpha = ۰/۶ = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = ۰/۶ \times ۱۵۰۰ = ۹۰۰\,m$$



$$AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \Rightarrow AC = \sqrt{۱۵۰۰^۲ - ۹۰۰^۲} = ۱۲۰۰\,m$$

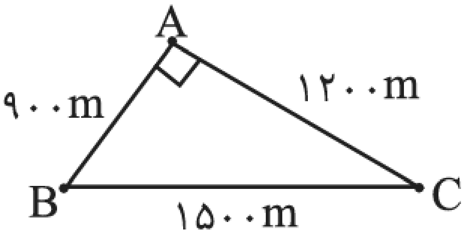
$$v = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{۹۰۰}{t_{AB}} \\ v = \dfrac{۱۲۰۰}{t_{AC}} \end{cases} \Rightarrow \frac{۹۰۰}{t_{AB}} = \frac{۱۲۰۰}{t_{AC}}$$

$$\Rightarrow \frac{t_{AC}}{t_{AB}} = \frac{۱۲۰۰}{۹۰۰} = \frac{۴}{۳}$$

$$\xrightarrow{t_{AC}=t_{AB}+۱} \frac{t_{AB}+۱}{t_{AB}} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۴t_{AB} = ۳t_{AB} + ۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_{AB} = ۳\,s \\ t_{AC} = ۴\,s \end{cases} \Rightarrow v_{\text{توص}} = \frac{۹۰۰}{۳} = ۳۰۰\,\frac{m}{s}$$

با جابجا کردن مکان بمب داریم:



$$\begin{cases} t_{AB} = \dfrac{۹۰۰}{۳۰۰} = ۳\,s \\ t_{BC} = \dfrac{۱۵۰۰}{۳۰۰} = ۵\,s \end{cases} \Rightarrow \Delta t = ۵ - ۳ = ۲\,s$$

۴۸

گزینه «۴»

اگر در مدت t، آونگ ساده‌ای n نوسان کم‌دامنه انجام دهد، دورهٔ نوسان‌های آن برابر است با:

$$T = \frac{t}{n} \xrightarrow{t_۱=t_۲} \frac{T_۲}{T_۱} = \frac{n_۱}{n_۲} \qquad (۱)$$

از طرفی با استفاده از رابطهٔ دورهٔ نوسان‌های کم‌دامنهٔ آونگ ساده داریم:

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \frac{T_۲}{T_۱} = \sqrt{\frac{L_۲}{L_۱} \times \frac{g_۱}{g_۲}} \qquad (۲)$$

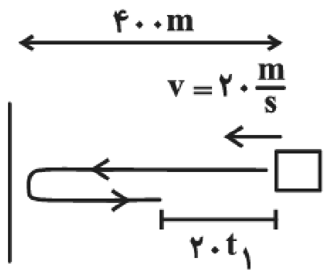
$$\xrightarrow{(۲)\ ,\ (۱)} \frac{n_۱}{n_۲} = \sqrt{\frac{L_۲}{L_۱} \times \frac{g_۱}{g_۲}}$$

$$\xrightarrow{n_۱=۲\ ,\ g_۱=۱۰\frac{N}{kg}\ ,\ n_۲=۵\ ,\ g_۲=۱/۶\frac{N}{kg}}$$

$$\frac{۲}{۵} = \sqrt{\frac{L_۲}{L_۱} \times \frac{۱۰}{۱/۶}} \Rightarrow \frac{L_۲}{L_۱} = \frac{۱۶}{۶۲۵}$$

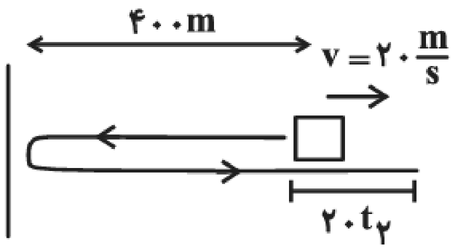
۴۹ گزینه «۲»

چون شخص با تندی ثابت به دیوار نزدیک می‌شود $t_۱$ ثانیه بعد به اندازهٔ $۲۰\,t_۱$ به دیوار نزدیک می‌شود و داریم:



$$L = vt$$
$$۴۰۰ + (۴۰۰ - ۲۰t_۱) = ۳۴۰\,t_۱$$
$$t_۱ = \frac{۸۰۰}{۳۶۰} = \frac{۲۰}{۹}s$$

و در حال دور شدن نیز به اندازهٔ $۲۰\,t_۲$ از دیوار دور می‌شود.



$$L = vt$$
$$\Rightarrow ۴۰۰ + (۴۰۰ + ۲۰t_۲) = ۳۴۰\,t_۲$$
$$t_۲ = \frac{۸۰۰}{۳۲۰} = \frac{۵}{۲}s$$

$$t_۲ - t_۱ = \frac{۵}{۲} - \frac{۲۰}{۹} = \frac{۵}{۱۸}s$$

۵۰ گزینه «۲»

ابتدا تندی انتشار امواج عرضی در تار را محاسبه می‌کنیم:

$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}} \xrightarrow[L=۱\,m\ ,\ m=۶\times۱۰^{-۳}kg]{F=۲۴۰\ N} v = \sqrt{\frac{۲۴۰\times۱}{۶\times۱۰^{-۳}}} = ۲۰۰\frac{m}{s}$$

سپس با توجه به رابطهٔ بسامدهای تشدیدی تار، عدد هماهنگ را محاسبه می‌کنیم:

$$f_n = \frac{nv}{۲L} \xrightarrow[v=۲۰۰\frac{m}{s}\ ,\ L=۱\,m]{f_n=۳۰۰Hz} ۳۰۰ = \frac{n\times۲۰۰}{۲} \Rightarrow n = ۳$$

اکنون طول‌موج امواج گسیل شده در هوا را محاسبه می‌کنیم:

$$v_{\text{صوت}} = \lambda f \xrightarrow[f=۳۰۰Hz]{v_{\text{صوت}}=۳۳۰\frac{m}{s}} \lambda = \frac{۳۳۰}{۳۰۰} = ۱/۱\,m = ۱۱۰\,cm$$

۵۱ گزینه «۳»

تندی انتشار موج و سپس بسامد هماهنگ دوم تار را در حالتی که نیروی کشش تار N ۱۶۲ است، به دست می‌آوریم:

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}=\sqrt{\frac{۱۶۲}{۵\times ۱۰^{-۳}}}=\sqrt{\frac{۱۶۲\times ۲}{۱۰^{-۲}}}=\sqrt{\frac{۸۱\times ۴}{۱۰^{-۲}}}=۱۸۰\,\frac{m}{s}$$

$$f_n=\frac{nv}{۲L}\xrightarrow[L=۰/۷۵\,m]{n=۲\ ,\ v=۱۸۰\frac{m}{s}}f_۲=\frac{۲\times ۱۸۰}{۲\times ۰/۷۵}=۲۴۰\,Hz$$

تندی انتشار موج و سپس هماهنگ دوم تار را در حالت دوم نیز به دست می‌آوریم:

$$v'=\sqrt{\frac{F'}{\mu}}=\sqrt{\frac{۲۸۸}{۵\times ۱۰^{-۳}}}=\sqrt{\frac{۲۸۸\times ۲}{۱۰^{-۲}}}=\sqrt{\frac{۱۴۴\times ۴}{۱۰^{-۲}}}=۲۴۰\,\frac{m}{s}$$

$$f'_n=\frac{nv'}{۲L}\xrightarrow[L=۰/۷۵\,m]{n=۲\ ,\ v'=۲۴۰\frac{m}{s}}f'_۲=\frac{۲\times ۲۴۰}{۲\times ۰/۷۵}=۳۲۰\,Hz$$

اکنون می‌توانیم تغییر بسامد هماهنگ دوم تار را پیدا کنیم:

$$f'_۲-f_۲=۳۲۰-۲۴۰=۸۰\,Hz$$

بنابراین بسامد هماهنگ دوم تار Hz ۸۰ افزایش می‌یابد.

---

۵۲ گزینه «۳»

فقط مورد (پ) درست است.

بررسی موارد نادرست:

الف) هر چه پهنای شکاف کوچکتر باشد، پراش قوی‌تری رخ می‌دهد.

ب) پراش برای همه امواج می‌تواند رخ دهد.

---

۵۳ گزینه «۲»

موارد (ب) و (ت) نادرست‌اند و بقیه موارد طبق متن کتاب درسی درست هستند.

علت نادرستی مورد (ب): اگر تأخیر زمانی بین دو صوت اولیه و بازتابیده کمتر از ۰/۱ ثانیه باشد، گوش انسان نمی‌تواند پژواک را از صوت مستقیم اولیه تمیز دهد. پس با عدد ۰/۲۵ ثانیه امکان‌پذیر است.

علت نادرستی مورد (ت): تندی امواج روی سطح آب به عمق آن بستگی دارد و در قسمت‌های عمیق بیشتر است.

---

۵۴ گزینه «۳»

بسامد، بسامد زاویه‌ای و دوره تناوب از ویژگی‌های چشمه موج هستند که تغییر نمی‌کنند. همچنین تندی انتشار موج از ویژگی‌های محیط است که تغییر نمی‌کند و با توجه به رابطه $v=\lambda f$ با ثابت ماندن تندی انتشار و بسامد موج، طول موج نیز ثابت می‌ماند. با توجه به جذب مقداری از انرژی موج، انرژی مکانیکی موج کاهش می‌یابد و چون انرژی موج با مجذور دامنهٔ آن متناسب است، لذا دامنهٔ موج نیز کاهش می‌یابد. بیشینهٔ تندی نوسان هر ذره هم از رابطهٔ $v_{\max}=A\omega$ به دست می‌آید که با ثابت ماندن ω و کاهش A، $v_{\max}$ کاهش می‌یابد.

---

۵۵ گزینه «۱»

با کاهش طول‌موج طبق رابطه زیر، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها افزایش می‌یابد:

$$\uparrow K_{\max}=\uparrow\frac{hc}{\lambda\downarrow}-W_{\text{ثابت}}$$

۵۶ گزینه «۲»

به بررسی موارد می‌پردازیم:

الف) نادرست؛ طیف یک گاز در حال التهاب، طیف گسیلی خطی (گسسته) است.

ب) نادرست؛ گازهای کم‌فشار و رقیق طیف گسسته (خطی) تشکیل می‌دهند.

پ) درست

ت) نادرست؛ علت وجود خطوط تاریک در طیف خورشید، گازهای جو خورشید هم است، علاوه بر عناصر موجود در اتمسفر زمین.

---

۵۷ گزینه «۴»

طول‌موج طیف اتم هیدروژن از رابطهٔ$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{n^{۲}})$ محاسبه می‌شود کهn' شماره متناظر با نام رشته می‌باشد. می‌دانیم کوتاه‌ترین طول‌موج به ازای$n=\infty$ به دست می‌آید و بلندترین طول‌موج به ازای نزدیک‌ترین تراز یعنی$n=n'+۱$ به دست می‌آید:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{۱}{\lambda_{\min}}=R(\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{\infty})\\ \frac{۱}{\lambda_{\max}}=R(\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۲۵})\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}=\frac{\frac{۱}{۱۶}}{\frac{۹}{۴۰۰}}=\frac{۴۰۰}{۹\times۱۶}=\frac{۲۵}{۹}$$

$$\Rightarrow\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}=\frac{۹}{۲۵}$$

---

۵۸ گزینه «۳»

با استفاده از معادله انیشتین (معادله فوتوالکتریک) برای فوتوالکتریک داریم:

$$K_{\max}=hf-W_{\circ}\Rightarrow\begin{cases}K_{\max}=hf-W_{\circ}\\ ۰/۶\,K_{\max}=h(\frac{۳}{۴}f)-W_{\circ}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{۸\times۱۰^{-۱۹}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}=hf-W_{\circ}\\ \frac{۰/۶\times۸\times۱۰^{-۱۹}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}=\frac{۳}{۴}hf-W_{\circ}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۵=hf-W_{\circ}\\ ۳=\frac{۳}{۴}hf-W_{\circ}\end{cases}$$

با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول فوق داریم:

$$\begin{cases}hf=۸\,eV\\ W_{\circ}=۳\,eV\end{cases}$$

---

۵۹ گزینه «۲»

وقتی ۸۰ درصد از ماده از بین می‌رود پس ۲۰ درصد آن باقی مانده است.

$$m=M_{\circ}(\frac{۱}{۲})^{n}\Rightarrow\frac{۲۰}{۱۰۰}M_{\circ}=\frac{M_{\circ}}{۲^{n}}\Rightarrow۲^{n}=\frac{۱۰۰}{۲۰}=۵$$

$$۲^{n}=۵\Rightarrow\log۲^{n}=\log۵\Rightarrow n\log۲=\log۵$$

$$\log۵=\log\frac{۱۰}{۲}=\log۱۰-\log۲=۱-۰/۳=۰/۷$$

$$n\log۲=\log۵\Rightarrow n\times\frac{۳}{۱۰}=\frac{۷}{۱۰}\Rightarrow n=\frac{۷}{۳}$$

۶۰

گزینه «۴»

فرض می‌کنیم تفاوت اعداد جرمی هستهٔ مادر و دختر y باشد:

$$ {}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-y}_{Z}X' + n\,{}^{۴}_{۲}\alpha + m\,{}^{۰}_{-۱}\beta $$

$$ \begin{cases} A = (A-y) + ۴n + ۰ \\ Z = Z + ۲n - m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ۴n \\ ۲n = m \end{cases} $$

طبق گفتهٔ مسئله : $m - n = ۴ \Rightarrow ۲n - n = ۴$

$$ \Rightarrow n = ۴ \Rightarrow m = ۸ \Rightarrow y = ۱۶ $$

۶۱

گزینه «۲»

در واپاشی‌های بتای مثبت(${}^{۰}_{+۱}e^{+}$)، بتای منفی(${}^{۰}_{-۱}e^{-}$) و گاما (${}^{۰}_{۰}\gamma$) عدد جرمی تغییری نمی‌کند اما در واپاشی آلفا به ازای تابش هر ذره آلفا(${}^{۴}_{۲}He$) عدد جرمی ۴ واحد کاهش می‌یابد.

۶۲

گزینه «۲»

تنها عبارت «پ» درست است.

بررسی عبارات نادرست:

الف) انرژی نوکلئون‌های وابسته به هسته نیز مانند انرژی الکترون‌های وابسته به اتم کوانتیده‌اند و نوکلئون‌های درون هسته نمی‌توانند هر انرژی دلخواهی را اختیار کنند.

ب) اگر تعداد پروتون‌های درون هسته افزایش یابد، برای پایدار ماندن هسته باید تعداد نوترون‌ها افزایش یابد.

ت) هر نوکلئون فقط به نزدیک‌ترین نوکلئون‌های مجاورش نیروی هسته‌ای وارد می‌کند.

۶۳

گزینه «۲»

با توجه به این‌که بار هسته را تعداد پروتون‌های آن هسته مشخص می‌کند، داریم:

$$ q_A = Z_A e \Rightarrow ۴/۸ \times ۱۰^{-۱۸} = Z_A(۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}) \Rightarrow Z_A = ۳۰ $$

$$ q_B = Z_B e \Rightarrow ۲/۴ \times ۱۰^{-۱۸} = Z_B(۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}) \Rightarrow Z_B = ۱۵ $$

از طرفی هسته‌های A و B روی خط $Z = N$ قرار گرفته‌اند، پس:

$$ N_A = Z_A = ۳۰ \Rightarrow A_A = Z_A + N_A = ۶۰ $$

$$ N_B = Z_B = ۱۵ \Rightarrow A_B = Z_B + N_B = ۳۰ $$

عدد جرمی هسته‌هایی که روی خط عمود بر خط $Z = N$ قرار گرفته‌اند، با هم برابر است، بنابراین:

$$ A_C = A_A = ۶۰ \Rightarrow A_C - A_B = ۶۰ - ۳۰ = ۳۰ $$

۶۴

گزینه «۴»

مخلوط آب و الکل نوعی محلول است و ذرات سازندهٔ آن مولکول‌ها هستند و نور را پخش نمی‌کند. (انحلال الکل در آب به صورت مولکولی است.)

شیر مخلوطی پایدار (نوعی کلویید) است. ذرات سازندهٔ کلوییدها توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت می‌باشد و کلوئیدها جزء مواد ناهمگن هستند.

شربت خاکشیر یک نوع سوسپانسیون است و نور را پخش می‌کند و ذرات سازندهٔ آن ذرات ریز ماده است.

گزینه «۳»

فرمول عمومی اسید چرب با زنجیر هیدروکربنی سیر شده به صورت $C_nH_{۲n+۱}COOH$ است که با توجه به اطلاعات مسئله و تعداد کربن موجود در زنجیر آلکیل آن (۱۶ کربن)، فرمول شیمیایی این اسید چرب به صورت

$$C_{۱۶}H_{۳۳}COONa(aq) + H_۲O(l)$$

ابتدا با استفاده از مقدار pH، غلظت مولار محلول لوله بازکن را به دست می‌آوریم:

$$pH = ۱۳/۴ \rightarrow [H^+] = ۱۰^{-۱۳/۴} = ۱۰^{-۱۴+۰/۶} = ۴ \times ۱۰^{-۱۴} mol.\, L^{-۱}$$

$$[OH^-] = [NaOH] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۴ \times ۱۰^{-۱۴}} = ۰/۲۵ mol.\, L^{-۱}$$

اکنون از روی مقدار جرم اسیدچرب به حجم مصرفی لوله بازکن برحسب میلی‌لیتر خواهیم رسید:

$$۱۳۵ g C_{۱۶}H_{۳۳}COOH \times \frac{۱ mol C_{۱۶}H_{۳۳}COOH}{۲۷۰ g C_{۱۶}H_{۳۳}COOH} \times \frac{۱ mol\, NaOH}{۱ mol\, C_{۱۶}H_{۳۳}COOH} \times \frac{۱L \text{ محلول}}{۰/۲۵ mol\, NaOH} \times \frac{۱۰۰۰ mL \text{ محلول}}{۱L \text{ محلول}} = ۲۰۰۰ mL \text{ محلول}$$

گزینه «۳»

شمار مول‌های اسید موجود در محلول I را حشاب می‌کنیم:

$$HCl \to n = ۰/۱ \times ۰/۵ = ۰/۰۵ mol HCl$$

برای خنثی شدن کامل اسید و باز، تعداد مول‌های اسید باید با تعداد مول‌های باز برابر باشد. بنابراین محلول $NaOH$ در ظرف (II) نیز باید حاوی ۰/۰۵ مول $NaOH$باشد.

بررسی همه گزینه‌ها:

گزینه «۱»: برای خنثی شدن کامل ۰/۰۵ مول HCl موجود در ظرف I، ظرف II باید حاوی حداقل ۰/۰۵ مول $NaOH$باشد. عبارت می‌تواند دارای ۰/۰۵ مول سدیم هیدروکسید باشد در گزینه «۱» با این معناست که وجود دقیقاً ۰/۰۵ مول $NaOH$برای خنثی‌سازی کامل کافی است. بدیهی است که اگر مقدار $NaOH$ بیشتر از این مقدار باشد، تمام HCl خنثی خواهد شد و محلول نهایی بازی می‌شود. استفاده از واژه می‌تواند در این گزینه امکان وگجود ۰/۰۵ مول یا بیشتر از سود را در ظرف II برای خنثی‌سازی در نظر می‌گیرد.

گزینه «۲»: در دمای ۲۵ درجه سلسیوس، حاصل ضرب غلظت یون‌های هیدرونیوم $[H_۳O^+]$ و یون‌های هیدروکسید $[OH^-]$ در هر محلول آبی (چه اسیدی باشد، چه بازی و چه خنثی)، همواره مقدار ثابتی است و برابر با $۱/۰ \times ۱۰^{-۱۴}$ می‌باشد. این مقدار ثابت، منحصراً به دما وابسته است و در دمای ۲۵ درگجه سلسیوس این مقدار مشخص را دارد. تغییر در اسیدیته یا بازی بودن محلول‌ها، تنها باعث تغییر در نسبت غلظت این دو یون می‌شود؛ به‌طوری که در محلول اسیدی $[H_۳O^+] > [OH^-]$ در محلول بازی $[OH^-] > [H_۳O^+]$ و در محلول خنثی $[OH^-] = [H_۳O^+] = ۱/۰ \times ۱۰^{-۷} M$ است، اما حاصل‌ضرب آنها در تمامی این حالات در دمای ۲۵ درجه سلسیوس ثابت و برابر $۱/۰ \times ۱۰^{-۱۴}$ باقی می‌ماند. شکل زیر رد کتاب درسی به‌منظور رساندن همین مفهوم ارائه شده است، ببینید:

$[H^+] = ۱۰^{-۱۴} mol.L^{-۱}$ $[H^+] = ۱۰^{-۷} mol.L^{-۱}$ $[H^+] = ۱ mol.L^{-۱}$

$O[H^-] = ۱ mol.L^{-۱}$ $[OH^-] = ۱۰^{-۷} mol.L^{-۱}$ $[OH^-] = ۱۰^{۱۴} mol.L^{-۱}$

گزینه «۳»: برای خنثی شدن کامل یک اسید با یک باز (هر دو قوی) تعداد مول‌های یون هیدرونیوم $(H_۳O^+)$ تولید شده توسط اسید باید با تعداد مول‌های یون هیدروکسید (OH^-) تولید شده توسط باز برابر باشد. در مورد اسید قوی و تک ظرفیتی مانند HCl و باز قوی و تک ظرفیتی مانند $NaOH$، هر مول از اسید یک مول یون H^+ (که در آب به $H_۳O^+$ تبدیل می‌شود) و هر مول از باز یک مول یون OH^- تولید می‌کند. بنابراین برای خنثی شدن کامل تعداد مول‌های HCl باید دقیقاً برابر با تعداد مول‌های $NaOH$ باشد. این برابری تعداد مول‌ها یا شمار یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید) مربوط می‌شود. در این گزینه، مقایسه شمار یون‌ها در دو ظرف با حجم‌های متفاوت مطرح شده است که گمراه کننده است (!) نکته کلیدی این است که برای خنثی شدن، فقط باید تعداد مول‌های اسید و باز واکنش دهنده با یکدیگر برابر باشد (نه لزوماً غلظت در حجم‌های مشخص). تصور کنید ۰/۰۵ مول HCl در ۰/۵ لیتر آب حل شده است (همان شرایط ظرف l). برای خنثی کردن آن، دقیقاً به ۰/۰۵ مول $HaOH$ نیاز داریم، چه این مقدار $HaOH$ در ۰/۲۵ لیتر آب حل شده باشد (غلظت ۰/۲ مولار) چه در ۱ لیتر آب حل شده باشد (غلظت ۰/۰۵ مولار) در هر دو حالت تعداد مول‌هایی OH^- مهم است که برابر با ۰/۰۵ مول خواهد بود و برای واکنش کامل با ۰/۰۵ مول H^+ موجود است. بنابراین برای خنثی شدن، تمرکز بر برابری تعداد مول‌های اسید و باز است، نه غلظت آنها در حجم‌های متفاوت!

گزینه «۴»: با توجه به اینکه برای خنثی شدن کامل، تعداد مول‌های اسید و باز باید برابر باشد، در این سناریو نیز ۰/۰۵مول $HaOH$ برای خنثی‌سازی ۰/۰۵ مول HCl مورد نیاز است. اگر حجم محلول $HaOH$ (ظرف II) برابر ۲۵۰ میلی‌لیتر ۲۵ لیتر) باشد، غلظت $NaOH$ در این ظرف برابر با $\frac{۰/۰۵mol}{۰/۲۵L} = ۰/۲M$ خواهد بود. از آنجایی که $NaOH$ یک باز قوی و تک‌ظرفیتی است، غلظت یون هیدروکسید $[OH^-]$ نیز برابر ۰/۲ مولار است. در ظرف l، غلظت محلول HCl برابر ۰/۱ مولار است و چون HCl یک اسید قوی و تک ظرفیتی است، غلظت یون هیدرونیوم $([H_۳O^+])$ نیز برابر ۰/۱ مولار است. بنابراین در این حالت خاص که حجم محلول باز، نصف حجم محلول اسید است (برای داشتن تعداد مول‌های برابر) غلظت یون هیدروکسید (۰/۲ مولار) دقیقاً دو برابر غلظت یون هیدرونیوم (۰/۱ مولار) خواهد بود. این نشان می‌دهد که در شرایط غیر خنثی (قبل از اختلاط یا اگر حجم‌ها و غلظت‌ها به گونه‌ای باشند که تعداد مول‌های اسید و باز برابر نباشد.) غلظت یون‌های $H_۳O^+$ و OH^- می‌توانند مقادیر متفاوتی داشته باشند و لزوماً با هم برابر نیستند.

۶۷ گزینه «۲»

ابتدا جرم مولکول‌های یونیده نشده بوتانوئیک اسید را به شمار مول‌های آن تبدیل می‌کنیم.

$$۱/۷۶g CH_۳CH_۲CH_۲COOH \times \frac{۱mol\, CH_۳CH_۲CH_۲COOH}{۸۸g CH_۳CH_۲CH_۲COOH} = ۰/۰۲mol$$

$$\text{غلظت مولار مولکول های یونیده نشده} = \frac{۰/۰۲}{۵} = ۰/۰۰۴$$

معادله یونش بوتانوئیک اسید را نوشته برای سادگی فرمول آن را HA در نظر می‌گیریم.

$$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$$

غلظت مولار HA ٪/.dfrac{mol}{L}\۰/۰۰۴=,\$

$$[H^+] = [A^-] = ۱۶ \times ۱۰^{-۶} \qquad \text{غلظت مولار } A^- = \frac{۸ \times ۱۰^{-۵}}{۵} = ۱۶ \times ۱۰^{-۶}\frac{mol}{L}$$

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{(۱۶ \times ۱۰^{-۶}) \times (۱۶ \times ۱۰^{-۶})}{۴ \times ۱۰^{-۳}} = ۶/۴ \times ۱۰^{-۸}$$

---

۶۸ گزینه «۲»

معادلهٔ یونش اسیدHA (ضعیف) به صورت زیر است:

$$HA\,(aq) \rightleftharpoons \quad H^+\,(aq) + \quad A^-\,(aq)$$

غلظت اولیه	:	M	۰	۰
غلظت پس از یونش	:	$\underbrace{M - \alpha M}_{M(۱-\alpha)}$	αM	αM (مجموع $=۲\alpha M$)

$$\frac{\text{غلظت یون های حاصل از یونش}}{\text{غلظت اسید یونیده نشده}} = \frac{\text{شمار یون های حاصل از یونش}}{\text{شمار مولکول های یونیده نشده اسید}} \Rightarrow$$

$$= \frac{۲\alpha M}{M(۱-\alpha)} = \frac{۲\alpha}{۱-\alpha} = \frac{۲}{۱۵} \Rightarrow ۳۰\alpha = ۲ - ۲\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{۲}{۳۲} = \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow \text{درصد یونش} = \frac{۱}{۱۶} \times ۱۰۰ = \quad ۶/۲۵\ \%$$

در ادامه با استفاده از رابطهٔ ثابت یونش برای اسید ضعیفHA داریم:

$$\Rightarrow K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{\alpha^۲ M}{۱-\alpha} = \frac{\left(\frac{۱}{۱۶}\right)^۲ \times ۲/۶۴}{۱ - \frac{۱}{۱۶}} = ۰/۰۱۱$$

---

۶۹ گزینه «۴»

در گزینه‌های «۱» تا «۳»، به ترتیب آمونیاک، هیدروفلوئوریک اسید، آمونیاک و فرمیک اسید اسید یا باز ضعیف هستند. در اسیدها یا بازهای ضعیف برای محاسبه جرم آنیون اسید یا کاتیون حاصل از باز باید ثابت یونش یا درجه یونش آن‌ها وجود داشته باشد؛ بنابراین فقط در رابطه با گزینه «۴» می‌توان با قطعیت سخن گفت:

$$\Delta m = ۶/۲ - ۲/۳ = ۳/۹ \begin{cases} HNO_۳ \Rightarrow [NO_۳^-] = C_{HNO_۳} = ۰/۱ \Rightarrow ?gNO_۳^- = ۰/۱ \times ۶۲ = ۶/۲g \\ NaOH \Rightarrow [Na^+] = C_{NaOH} = ۰/۱ \Rightarrow ?gNa^+ = ۰/۱ \times ۲۳ = ۲/۳g \end{cases}$$

۷۰ گزینه «۴»

ابتدا حجم مولHCl (شیرهٔ معده) تولید شده در طول یک هفته را حساب می‌کنیم:

$$\text{حجم}\,HCl\ \text{تولید شده در طول یک هفته} = ۷\ \text{روز} \times \frac{۲\,L\ HCl}{۱\ \mathsf{p} \gg \mathsf{n}} = ۱۴\,L\ HCl$$

سپس شمار مول‌هایHCl موجود در شیرهٔ معده را به دست می‌آوریم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۱/۵} = ۱۰^{-۲} \times ۱۰^{۰/۵} = ۱۰^{-۲} \times ۳ = ۰/۰۳\,mol\,.\,L^{-۱}$$

$$n_{HCl} = ۰/۰۳\,mol\,.\,L^{-۱} \times ۱۴\,L = ۰/۴۲\,mol\,HCl$$

در گام بعد تعیین می‌کنیم که هر قرص ضد اسید توانایی خنثی کردن چند مولHCl را دارد:

$$NaHCO_۳(s) + HCl(aq) \rightarrow NaCl(aq) + H_۲O(l) + CO_۲(g)$$

$$۲/۴g\ \text{ص‌رق} \times \frac{۲۱g\ NaHCO}{۱۰۰g\ \text{ص‌رق}} \times \frac{۱\,mol\ NaHCO_۳}{۸۴\,g\ NaHCO_۳} \times \frac{۱\,mol\ HCl}{۱\,mol\ NaHCO_۳} = ۰/۰۰۶\,mol\ HCl$$

$$Mg(OH)_۲ + ۲HCl \rightarrow MgCl_۲ + ۲H_۲O$$

$$۲/۴g\ \text{ص‌رق} \times \frac{۲۹g\ Mg(OH)_۲}{۱۰۰g\ \text{ص‌رق}} \times \frac{۱\,mol\ Mg(OH)_۲}{۵۸\,g\ Mg(OH)_۲} \times \frac{۲\,mol\ HCl}{۱\,mol\ Mg(OH)_۲} = ۰/۰۲۴\,mol\ HCl$$

هر قرص ضد اسید توانایی خنثی کردن$۰/۰۰۶ + ۰/۰۲۴ = ۰/۰۳\,mol$ ازHCl را دارد:

تعداد قرص لازم برای خنثی کردن شیرهٔ معده تولید شده در طول یک هفته: $۱۴ = \frac{۰/۴۲}{۰/۰۳}$

---

۷۱ گزینه «۳»

مادهٔ سمت چپ از نیم‌واکنش باE° بالاتر با مادهٔ سمت راست از نیم‌واکنش باE° پایین‌تر به‌طور خودبه‌خودی واکنش می‌دهد. بنابراین$Hg(l)$ را برخلاف$I_۲(s)$ می‌توان در ظرفی از جنس$Pb(s)$ نگهداری کرد.

$$\begin{array}{ll} Hg^{۲+}(aq) + ۲e^- \rightarrow Hg(l) & E^{\circ} = ۰/۸۵\,V \\ I_۲(s) + ۲e^- \rightarrow ۲I^-(aq) & E^{\circ} = ۰/۵۴\,V \\ Pb^{۲+}(aq) + ۲e^- \rightarrow Pb(s) & E^{\circ} = -۰/۱۳\,V \end{array}$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) ابتدا نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش را می‌نویسیم. نیم‌واکنش اکسایش را در ۳ ضرب کرده تا ضریب الکترون در دو نیم‌واکنش برابر شود، پس از جمع دو نیم‌واکنش، واکنش کلی به دست می‌آید.

$$\begin{array}{ll} \text{ش‌یاس‌کا شن‌کاو مین} & : ۳Ce^{۳+}(aq) \rightarrow ۳Ce^{۴+} + ۳e^- \\ \text{ش‌اک شن‌کاو مین} & \underline{: Cr^{۳+}(aq) + ۳e^- \rightarrow Cr(s)} \\ \text{ی‌لک شن‌کاو} & : Cr^{۳+}(aq) + ۳Ce^{۳+}(aq) \rightarrow Cr(s) + ۳Ce^{۴+}(aq) \end{array}$$

۲)

سلول «وانادیم- کروم» : $E^{\circ}{}_{\text{لولس}} = E^{\circ}{}_{\text{دتاک}} - E^{\circ}{}_{\text{دنآ}} = E^{\circ}_{(Cr^{۳+}/Cr)} - E^{\circ}_{(V^{۲+}/V)} = -۰/۷۴ - (-۱/۲) = ۰/۴۶\,V$

سلول «کروم- سرب» : $E^{\circ}{}_{\text{لولس}} = E^{\circ}{}_{\text{دتاک}} - E^{\circ}{}_{\text{دنآ}} = E^{\circ}_{(Pb^{۲+}/Pb)} - E^{\circ}_{(Cr^{۳+}/Cr)} = -۰/۱۳ - (-۰/۷۴) = ۰/۶۱\,V$

۴) E° مربوط به$Ce^{۴+}(aq)$ نسبت بهE° مربوط به$Pb^{۲+}(aq)$ کوچک‌تر است. بنابراین قدرت اکسندگی$Ce^{۴+}(aq)$ از$Pb^{۲+}(aq)$ کمتر است.

---

۷۲ گزینه «۴»

گزینهٔ «۱»: شکل الف می‌تواند مربوط به حلبی و شکل ب می‌تواند مربوط به آهن سفید باشد.

گزینهٔ «۲»: نیم‌واکنش کاهش در خوردگی به صورت زیر است.

$$\underbrace{O_۲ + ۲H_۲O + ۴e^-}_{\text{تسا تفه ربارب هدنهد شن‌کاو بی‌ارض عمج}} \rightarrow ۴OH^-$$

گزینهٔ «۳»: قدرت کاهندگی فلز A از M بیشتر است نه $A^{۲+}$ از $M^{۲+}$

گزینهٔ «۴»: قدرت کاهندگی A از B و M بیشتر است پس اگر قطعه‌ای از A را در محلولی از نمک M قرار دهیم واکنش انجام می‌شود و دمای محلول افزایش می‌یابد.

---

۷۳ گزینه «۲»

فقط عبارت (پ) درست است.

بررسی موارد:

الف) نادرست؛ با یک تیغهٔ مسی و تیغه‌ای از جنس فلز دیگر مانند روی و با میوه‌ای مانند لیمو می‌توان نوعی باتری ساخت و با آن یک لامپ را روشن کرد.

ب) نادرست؛ در برخی واکنش‌های اکسایش- کاهش افزون بر داد و ستد الکترون، انرژی نیز آزاد می‌شود.

پ) درست؛ در مورد نقره دمای مخلوط واکنش ثابت می‌ماند یعنی اصلاً افزایش دما نداریم، زیرا قدرت کاهندگی نقره از مس کمتر است.

ت) نادرست؛ اندازه‌گیری پتانسیل یک نیم‌سلول به‌طور جداگانه ممکن نیست.

ث) نادرست؛ لیتیم در میان فلزها کمترین چگالی را دارد.

---

۷۴ گزینه «۴»

در این واکنش عدد اکسایش اتم‌های ید از صفر به ۵+ افزایش می‌یابد. پس گونهٔ کاهنده $I_۲$ است. در این واکنش H^+ تولید می‌شود، پس pH محیط کاهش می‌یابد و به کمتر از ۷ می‌رسد. در واکنش انجام شده عدد اکسایش ید از صفر به ۵+ رسیده است. چون در سمت چپ ۲ اتم ید داریم، تغییر عدد اکسایش آن را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$۲ \times ۵ = ۱۰$$

عدد اکسایش کلر از ۵+ به ۱- رسیده، ۶ واحد تغییر کرده است. در ابتدا باید ضریب $ClO_۳^-$ را برابر ۵ و ضریب $I_۲$ را برابر ۳ قرار دهیم. با مشخص شدن ضریب این دو گونه بقیه مواد موازنه می‌شوند.

$$\overbrace{۳I_۲ + ۵ClO_۳^- + ۳H_۲O \rightarrow ۶IO_۳^-}^{۶\times(+۵)=۳۰\uparrow} + ۶H^+ + ۵Cl^-$$

مجموع ضرایب استوکیومتری مواد واکنش‌دهنده و فراورده برابر ۲۸ است.

$$۷/۲۲۴ \times ۱۰^{۲۳} e^- \times \frac{۱\,mol\ e^-}{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\ e^-} \times \frac{۵\,mol\ Cl^-}{۳۰\ mol\ e^-} = ۰/۲\,mol\ Cl^-$$

---

۷۵ گزینه «۴»

نیم‌واکنش‌های انجام شده در فرایند برقکافت آب به‌صورت زیر هستند:

آند: $۲H_۲O(l) \rightarrow O_۲(g) + ۴H^+(aq) + ۴e^-$

کاتد: $۴H_۲O(l) + ۴e^- \rightarrow ۲H_۲(g) + ۴OH^-(aq)$

ابتدا میزان اکسیژن تولیدی در برقکافت آب را محاسبه می‌کنیم:

$$?molO_۲ = ۱/۲\,mol\,e^- \times \frac{۱\,mol\,O_۲}{۴\,mol\,e^-} = ۰/۳\,mol\,O_۲$$

حال می‌توان نوشت:

$$CH_۴ + ۲O_۲ \rightarrow CO_۲ + ۲H_۲O$$

$$?gCH_۴ = ۰/۳\,mol\,O_۲ \times \frac{۱\,mol\,CH_۴}{۲\,mol\,O_۲} \times \frac{۱۶\,g\,CH_۴}{۱\,mol\,CH_۴} = ۲/۴\,g\,CH_۴$$

---

۷۶ گزینه «۴»

بررسی موارد:

الف) نادرست؛ در سلول‌های الکترولیتی، همانند سلول‌های گالوانی، اکسایش در آند و کاهش در کاتد انجام می‌شود.

ب) درست؛ نسبت جرم‌ها: $\frac{۳۲}{۴} = ۸$

پ) نادرست؛ در سلول الکترولیتی برقکافت آب، همانند سلول الکترولیتی فرایند هال، جنس الکترودها یکسان (گرافیت) است.

ت) درست؛ در فرایند هال در کاتد آلومینیم مذاب و در فرایند برقکافت $NaCl$ مذاب در کاتد سدیم مذاب تولید می‌شود.

۷۷ گزینه «۳»

سیلیسیم طبق واکنش $SiO_۲ + C \rightarrow Si + CO$ از واکنش سیلیس و کربن به دست می‌آید، پس واکنش‌پذیری کربن از سیلیسیم بیشتر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: این واکنش در دماهای بالا و با دادن گرما انجام می‌شود.

گزینه «۲»: طبق متن صفحه ۴۸ کتاب درسی شیمی یازدهم درست است.

گزینه «۴»: طبق واکنش داده شده درست است.

---

۷۸ گزینه «۲»

عدد اکسایش وانادیم در ترکیب $(VO_۲)_nX$ برابر با ۵+ است. اگر عدد اکسایش وانادیم تولید شده را a فرض کنیم. واکنش کلی صورت گرفته به صورت مقابل خواهد بود:

$$۳V^{۵+} + (۵-a)Al \rightarrow (۵-a)Al^{+۳} + ۳V^{+a}$$

$$= \frac{۱۰ \times ۵/۲۵ \times ۱/۲}{۸۲n + m_x} = \frac{۶۳}{۸۲n + m_x}$$

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{چگالی} \times \text{درصد جرمی} \times ۱۰}{\text{جرم مولی}}$$

$$= \frac{۶۳}{۸۲n + m_x} \times ۰/۴ = \frac{۲۵/۲}{۸۲n + m_x}$$

$$\text{مول} = \text{غلظت مولی} \times \text{حجم}$$

مقدار مول $V^{۵+}$ را به دست می‌آوریم:

$$mol\,V^{۵+} = \frac{۲۵/۲}{۸۲n + m_x} mol\,(VO_۲)_n \times \frac{n\,mol\,V^{۵+}}{۱mol\,(VO_۲)_n} = \frac{۲۵/۲n}{۸۲n + m_x} mol$$

مطابق واکنش فوق این مقدار $V^{۵+}$ با ۴/۳۲ گرم Al واکنش می‌دهد، بنابراین داریم:

$$gAl = \frac{۲۵/۲n}{۸۲n + m_x} molV^{۵+} \times \frac{(۵-a)Al}{۳mol\,V^{+۵}} \times \frac{۲۷g\,Al}{۱mol\,Al} = ۴/۳۲g \Rightarrow \frac{m_x}{n} = ۱۸۰/۵ - ۵۲/۵a$$

در نهایت رنگ محلول و مقدار a را محاسبه می‌کنیم:

محلول حاصل بنفش رنگ
محلول حاصل سبز رنگ
غ ق ق

$$\frac{m_x}{n} \begin{cases} a = ۲ \Rightarrow \frac{m_x}{n} = ۷۵/۵ \Rightarrow \\ a = ۳ \Rightarrow \frac{m_x}{n} = ۲۳ \Rightarrow \\ a = ۴ \Rightarrow \frac{m_x}{n} = -۲۹/۵ \end{cases}$$

بنابراین اگر محلول حاصل بنفش رنگ باشد، مقدار $\frac{m_x}{n}$ برابر با ۷۵/۵ و اگر محلول حاصل سبزرنگ باشد، مقدار $\frac{m_x}{n}$ برابر با ۲۳ خواهد بود.

۷۹

گزینه «۲»

X یک فلز اصلی متعلق به دستهٔ s می‌باشد. به این معنا که یا متعلق به گروه ۱ است و یون‌های X^+ تشکیل می‌دهد یا متعلق به گروه ۲ است و یون‌های X^{2+} تشکیل می‌دهد. در مدل دریای الکترونی فلزات گروه اول به ازای هر یون X^+ یک e^- وجود دارد به این معنا که شمار الکترون‌ها و کاتیون‌ها با هم برابر است و تفاوتی ندارند. در نتیجه طبق صورت سوال عنصر X نمی‌تواند متعلق به گروه ۱ باشد، حتماً متعلق به گروه ۲ می‌باشد. در مدل دریای الکترونی فلزات گروه ۲ به ازای هر ۱ یون X^{2+}، ۲ عدد الکترون یافت می‌شود.

۱ تفاوت کاتیون و الکترون $\sim 2e^- \sim 1X^{2+}$

عنصر مورد نظر $_{12}Mg$ است

$$\frac{6/02 \times 10^{23}\ \text{تفاوت}}{1mol\ \text{تفاوت}}$$

$$\text{تفاوت الکترون و کاتیون ؟ : } 3/6g \times \frac{1mol\ X}{Mg\ X} \times \frac{1mol\ X^{2+}}{1mol\ X} \times = 9/03 \times 10^{22} \Rightarrow M = 24 g.mol^{-1} \Rightarrow$$

در هر اتم $_{12}Mg$، ۲ الکترون ظرفیتی هستند و در دریای الکترونی شرکت می‌کنند. ۱۰ الکترون نیز درونی هستند و در دریای الکترونی شرکت نمی‌کنند.

$$\text{درصد خواسته شده} = \frac{10}{12} \times 100 \simeq 83\ \%$$

۸۰

گزینه «۳»

بررسی موارد:

الف) درست؛ در مولکول CO_2، اتم‌های اکسیژن تراکم بار الکتریکی منفی بیشتری دارند.

ب) نادرست؛ مولکول O_3 با این‌که از یک نوع اتم تشکیل شده است ولی قطبی به حساب می‌آید و در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند.

پ) درست؛ در $CHCl_3$، بیشترین رنگ قرمز مربوط به کلر است.

ت) درست؛ SO_2 مولکولی مسطح است که اتم‌های اکسیژن تراکم بار الکتریکی بیشتری دارند.

۸۱

گزینه «۴»

نافلزهای C و D اگر به آرایش یک گاز نجیب رسیده باشند به این معنی است که در یک دوره از جدول قرار دارند و عنصر C به دلیل شعاع بزرگ‌تر، سمت چپ‌تر در دورهٔ خود نسبت به عنصر D قرار دارد و یون آن بار بیشتری خواهد داشت (مثل $_8O$ و $_7N$). پس در حضور کاتیون یکسان، آنتالپی فروپاشی شبکه و نقطهٔ ذوب ترکیب Mg با C بیشتر خواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) ترکیب C با D یک ترکیب مولکولی خواهد بود و این مواد چکش‌خوار نیستند.

۲) آنتالپی فروپاشی شبکه وابسته به بار یون‌ها می‌باشد که در این سوال معلوم نشده است.

۳) ممکن است B عنصر گالیم باشد و A عنصری از دستهٔ d که باعث غلط بودن این گزینه می‌شود.

۸۲

گزینه «۲»

ابتدا واکنش مورد نظر را نوشته و موازنه می‌کنیم:

$$۲V^{n+} + \ (n-۲)\ Zn \rightarrow (n-۲)\, Zn^{۲+} + ۲V^{۲+}$$

روش I)

$$۲LV^{n+} \times \frac{۰/۱\, mol\, V^{n+}}{۱\, LV^{n+}} \times \frac{(n-۲)\, mol\ Zn}{۲\, mol\ V^{n+}} \times \frac{۶۵\, g\ Zn}{۱\, mol\ Zn} = ۱۳\, g\ Zn$$

$$\Rightarrow n = ۴$$

روش II)

$$\frac{M \times V}{\text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{ضریب} \times \text{جرم مولی}} \Rightarrow \frac{۰/۱ \times ۲}{۲} = \frac{۱۳\, g}{۶۵\,(n-۲)}$$

$$\Rightarrow n = ۴$$

عدد اکسایش محلول اولیه ۴ بوده و رنگ محلول آبی می‌باشد.

ضریب عنصر اکسنده × اندیس عنصر اکسنده × تغییر عدد اکسایش عنصر اکسنده = الکترون مبادله شده

توجه: به جای عنصر اکسنده، از کاهنده نیز می‌توان استفاده کرد.

مبادله شده $e = ۲ \times ۱ \times ۱ = ۲\, e^-$

۸۳

گزینه «۳»

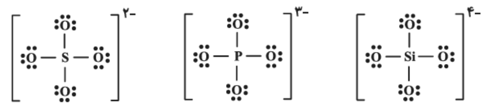
مورد (الف) نادرست است.

بررسی موارد:

الف) جیوه عنصری از جدول تناوبی است که در دما و فشار اتاق به حالت مایع می‌باشد اما ترکیب مولکولی نیست.

ب) دی متیل اتر و پروپان جرم مولی نزدیک به هم دارند اما دی متیل اتر ترکیبی قطبی و پروپان ترکیبی ناقطبی است. پس دی متیل اتر نسبت به پروپان آسان تر مایع می‌شود.

پ)



سیلیکات فسفات سولفات

با توجه به مشابه بودن ساختار لوویس این سه یون، نسبت جفت الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در آن‌ها با هم برابر است.

ت) طول پیوند $Si-C$ نسبت به طول پیوند $Si-Si$ کمتر است، بنابراین انرژی پیوند آن بیشتر و در نتیجه سختی آن هم بیشتر خواهد بود.

ث) جامدهای کوووالانسی در حالت مایع نارسانا و در حالت جامد سخت هستند.

۸۴

گزینه «۲»

ابتدا در نظر می‌گیریم که ۱۰۰ گرم از این نمونه خاک رس در اختیار داریم بنابراین:

$$\xrightarrow[\text{تبخیر شود}]{x\ \text{گرم آب}} \begin{cases} SiO_۲ : ۴۶/۲۰ \\ H_۲O : ۱۳/۳۲ - x \\ \underline{\text{مابقی مواد} : ۴۰/۴۸g} \end{cases}$$

$$\text{مجموع} : ۱۰۰ - x$$

$$\text{خاک رس } ۱۰۰g \begin{cases} SiO_۲ : ۴۶/۲۰g \\ H_۲O : ۱۳/۳۲g \\ \text{مابقی مواد} : ۴۰/۴۸g \end{cases}$$

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم ماده مورد نظر}}{\text{جرم نمونه}} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۵۰ = \frac{۴۶/۲۰}{۱۰۰ - x} \times ۱۰۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۴۶/۲۰}{۱۰۰ - x} \Rightarrow ۱۰۰ - x = ۹۲/۴$$

$$\Rightarrow x = ۷/۶g$$

بنابراین ۷/۶ گرم آب تبخیر شده است. حال می‌توانیم درصد آب تبخیر شده را محاسبه کنیم:

$$\text{درصد آب تبخیر شده} = \frac{۷/۶}{۱۳/۳۲} \times ۱۰۰ \simeq ۵۷\ \%$$

۸۵

گزینه «۲»

فقط عبارت «ث» درست است.

بررسی گزینه‌ها: آ) در نمودار داده شده، سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها از فرآورده‌ها بیشتر است و از آنجا که انرژی با پایداری رابطهٔ عکس دارد، پس پایداری فرآورده‌ها بیشتر است.

ب) در جمع جبری علامت مثبت و منفی مهم است و لحاظ می‌شود.

$$E_a = +۳۳۴kJ$$

واکنش گرماده است $\Delta H = -۵۶۶kJ$

$$\Rightarrow E_a + \Delta H = ۳۳۴ + (-۵۶۶) = -۲۳۲kJ$$

پ) کاتالیزگر رودیم با نماد شیمیایی Rh نمایش داده می‌شود.

ت) این واکنش گرماده است (درست) ولی ارتباطی به انجام شدن آن در دمای اتاق ندارد.انرژی فعالسازی واکنش زیاد است پس این واکنش در دماهای پایین به راحتی انجام نمی‌شود.

ث) این عبارت درست است. توجه شود مولکول CO قطبی است ولی مولکول $CO_۲$ ناقطبی است.

۸۶

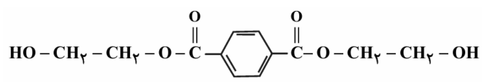
گزینه «۲»

فقط عبارت (پ) نادرست است. عدد اکسایش کربن ستاره دار برابر ۱ − = ۵ − ۴ است.

بررسی سایر عبارت‌ها:

عبارت (ت): ترکیب (۳) یا اتیلن گلیکول و ترکیب (۵) یا ترفتالیک اسید را نمی‌توان مستقیم از نفت خام بدست آورد.

عبارت (ث): دی استر حاصل از ترکیب (۳) و (۵) به صورت زیر است.



۸۷ گزینه «۱»

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینهٔ «۲»: سازندهٔ اصلی برخی لوازم پلاستیکی پلی‌اتن است.

گزینهٔ «۳»: محلول پتاسیم پرمنگنات به عنوان اکسنده در هر دو واکنش تولید مونومرهای سازندهٔ پلی اتیلن ترفتالات مورد استفاده قرار می‌گیرد. در واکنش مربوط به تولید اتیلن گلیکول از اتن، به صورت محلول رقیق و در واکنش تولید ترفتالیک اسید از پارازایلن به صورت محلول غلیظ وجود دارد.

گزینهٔ «۴»: در مبدل‌های کاتالیستی دیزلی برای تبدیل اکسیدهای نیتروژن به گاز نیتروژن از آمونیاک استفاده می‌شود.

---

۸۸ گزینه «۱»

با توجه به اطلاعات مسئله می‌توان نوشت:

ماده	$2NO$	O_2	$2NO_2$
اولیه	x	x	x
تغییرات	$-2a$	$-a$	$+2a$
نهایی	$x-2a$	$x-a$	$x+2a$

$$K=\frac{[NO_۲]^۲}{[NO]^۲[O_۲]}\Rightarrow ۰/۵=\frac{x^۲}{x^۲\times x}\times ۵\Rightarrow x=۱۰mol$$ (اولیه)

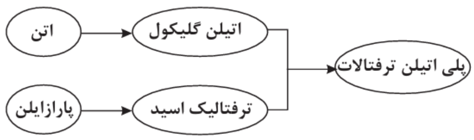
طبق صورت سوال: $۱۰+۲a=۲۰-۳a\Rightarrow ۵a=۱۰\Rightarrow a=۲$

$$K'=\frac{(۱۰+۴)(۱۰+۴)}{(۱۰-۴)(۱۰-۴)(۱۰-۲)}=\frac{۱۴\times ۱۴}{۶\times ۶\times ۸}\times ۵\simeq ۳/۴$$

---

۸۹ گزینه «۲»

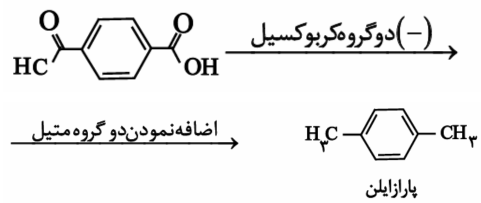
در شرایط مناسب و طی واکنش‌های اکسایش اتن و پارازایلن، مونومرهای سازنده تهیه می‌شود.



گزینه «۳»

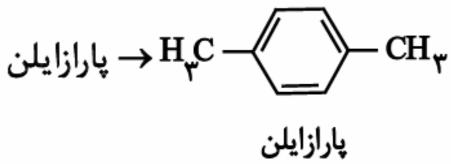
گزینهٔ سوم نادرست است.

گزینهٔ «۱»:

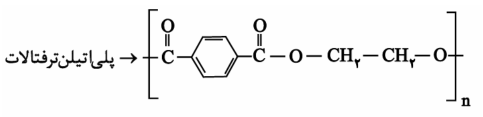


گزینهٔ «۲»:ساختار پارازایلن و واحد تکرارشوندهٔ پلی اتیلن ترفتالات به صورت زیر است:

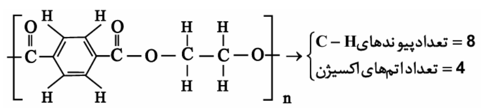
۱۰ = تعداد اتم های هیدروژن در پارازارایلن



۱۰ = تعداد اتم های کربن →



گزینهٔ «۳»:



گزینهٔ «۴»: در واحد تکرارشوندهٔ پلی اتیلن ترفتالات، سه عدد اکسایش (۱ − ۰ ۳) برای اتم‌های کربن وجود دارد.