



شماره داوطلب
نام خانوادگی و نام

خراسان رضوی
شهر



سروش اندیشه

مؤسسه فرهنگی هنری

کد آزمون ۱۲۸۹

۱۶ بهمن ماه ۱۴۰۴

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.
امام خمینی (ره)
جمهوری اسلامی ایران
وزارت فرهنگ و ارشاد
اسلامی مؤسسه سروش
اندیشه حیات

پاسخنامه آزمون شبیه ساز کنکور

گروه آزمایشی علوم ریاضی

شماره داوطلبی:

نام و نام خانوادگی:

مدت پاسخگویی: ۱۴۵ دقیقه

تعداد سوال: ۱۰۵ عدد

عنوان مواد امتحانی تعداد، شماره سوالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سوال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰ دقیقه
۲	فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه
۳	شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه

برای مشاهده پاسخنامه آزمون به سایت مؤسسه مراجعه نمایید

1 گزینه «2»

با توجه به دو زوج مرتب $(-2, 2)$ و $(-3, 1)$ ، تابع f اکیداً صعودی است، در نتیجه:

$$\begin{cases} 2x > -2 \Rightarrow x > -1 \\ x + 2 > 2x \Rightarrow x < 2 \end{cases} \cap \rightarrow -1 < x < 2$$

بنابراین x شامل دو مقدار صحیح صفر و 1 است.

2 گزینه «2»

با توجه به این که می‌خواهیم محدوده‌ای که تابع $y = -\frac{1}{4}f(1-2x)$ روی آن صعودی است را مشخص کنیم پس در آن محدوده تابع

$y = f(1-2x)$ نزولی است. چون تابع $y = 1-2x$ نزولی است و ترکیب دو تابع زمانی نزولی است که یکی نزولی و دیگری صعودی باشد پس $y = f(x)$ باید صعودی باشد. با توجه به نمودار، تابع $y = f(x)$ روی بازه $[0, 1]$ صعودی است در نتیجه:

$$0 \leq 1-2x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

3 گزینه «1»

با توجه به قضیه تقسیم داریم:

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x) \Rightarrow f(x) = (x-1)q(x) + 5 \quad (1)$$

طبق فرض سؤال خارج قسمت تقسیم، بر $x+2$ بخش پذیر است، بنابراین:

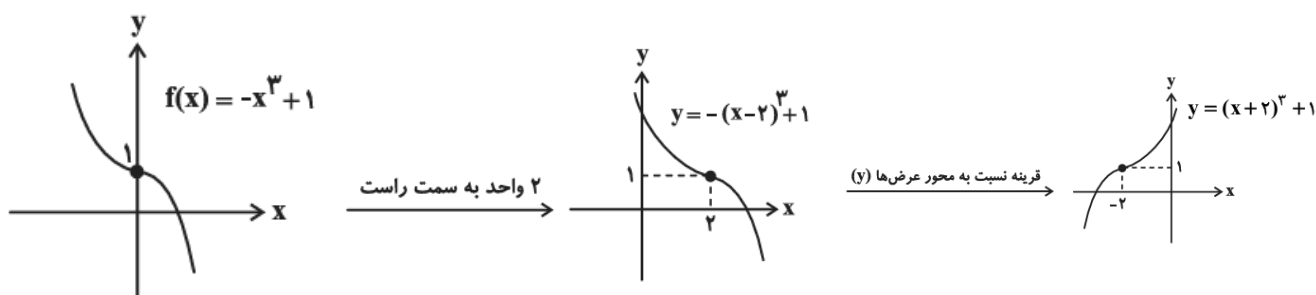
$$q(-2) = 0 \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} (2), (1): f(-2) = 5 \Rightarrow -8 + 4a - 2b - 1 = 5 \\ \Rightarrow 2a - b = 7 \\ (1): f(1) = 5 \Rightarrow 1 + a + b - 1 \Rightarrow a + b = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 4, b = 1$$

$$f\left(\frac{ab}{4}\right) = f\left(\frac{4 \times 1}{4}\right) = f(1) = 5 \Rightarrow 1 + 4 + 2 - 1 = 6$$

4 گزینه «4»

باید نمودار را رسم کنیم:



نمودار حاصل از ناحیه چهارم دستگاه مختصات عبور نمی‌کند.

5 گزینه «3»

با توجه به نمودار داریم:

$$f(0) = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$\frac{3T}{2} = 3 \Rightarrow T = 2 \Rightarrow \frac{\pi}{|a\pi|} = 2 \Rightarrow |a| = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

حال چون نقطه $(-\frac{1}{3}, 0)$ روی نمودار تابع قرار دارد، داریم:

$$a = \frac{1}{2} \text{ اگر } \Rightarrow 0 = b(\tan(\frac{1}{2} \times \pi \times (-\frac{1}{3}))) + 2$$

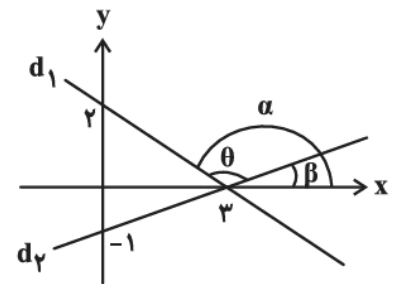
$$\Rightarrow \frac{-\sqrt{3}}{3}b + 2 = 0 \Rightarrow b = 2\sqrt{3} \Rightarrow a \times b \times c = 2\sqrt{3}$$

$$a = -\frac{1}{2} \text{ اگر } \Rightarrow 0 = b(\tan(-\frac{1}{2} \times \pi \times (-\frac{1}{3}))) + 2$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2\sqrt{3} \Rightarrow a \times b \times c = 2\sqrt{3}$$

6 گزینه «3»

می‌دانیم شیب هر خط با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x می‌سازد برابر است، لذا براساس نامگذاری شکل زیر داریم:



$$m_{d_1} = \tan \alpha = -\frac{2}{3}, \quad m_{d_2} = \tan \beta = \frac{1}{3}$$

از طرفی $\theta = \alpha - \beta$ ، در نتیجه:

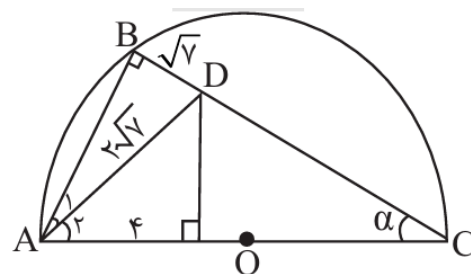
$$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}{1 + (-\frac{2}{3})(\frac{1}{3})} = \frac{-1}{1 - \frac{2}{9}} = -\frac{9}{7}$$

7 گزینه «2»

$$\tan 3x = \frac{1}{\tan x} = \cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

جواب‌های $\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{1\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}$ در بازه $[\pi, 2\pi]$ قرار دارند که مجموع آن‌ها برابر 6π است.



مطابق شکل $\hat{B} = 90^\circ$ و $(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) + \alpha = 90^\circ$ است. در مثلث‌های قائم‌الزاویه ABD و ADE قضیه فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{AB} = \sqrt{28 - 9} = \sqrt{21} \\ \text{DE} = \sqrt{28 - 16} = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

می‌دانیم $\tan \alpha = \cot(\hat{A}_1 + \hat{A}_2)$ ، پس کافیت $\tan(\hat{A}_1 + \hat{A}_2)$ را محاسبه کنیم:

$$\tan \hat{A}_1 = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{21}}, \tan \hat{A}_2 = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(\hat{A}_1 + \hat{A}_r) = \frac{\tan \hat{A}_1 + \tan \hat{A}_r}{1 - \tan \hat{A}_1 \cdot \tan \hat{A}_r} = \frac{\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{\sqrt{r}}{r}}{1 - (\frac{1}{\sqrt{r}})(\frac{\sqrt{r}}{r})} = \frac{\frac{r+1}{r\sqrt{r}}}{\frac{1}{r}} = \frac{\delta}{\sqrt{r}}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\tan(\hat{A}_1 + \hat{A}_r)} = \frac{\sqrt{r}}{\delta} = \cdot / r \sqrt{r}$$

داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cot x}{[x - \pi]} = \frac{\cot(\pi^-)}{[\pi^- - \pi]} = \frac{-\infty}{[-]} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$$

رابطه $\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x &= \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

با ضرب طرفین تساوی بالا در $2\sqrt{3}$ داریم:

$$3 \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \quad (1)$$

از رابطه $\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ بار دیگر استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\begin{aligned}\cos(2x - \frac{\pi}{3}) &= \cos 2(x - \frac{\pi}{6}) = 1 - 2 \sin^2(x - \frac{\pi}{6}) \\ &= 1 - 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

حال می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}\sin(2x + \frac{\pi}{6}) &= \sin(2x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) = \cos(2x - \frac{\pi}{3}) \\ &= \frac{1}{3} \quad (2)\end{aligned}$$

در نهایت عبارت‌های (1) و (2) را معادله داده شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$2 + \frac{m}{3} = 1 \Rightarrow m = -3$$

11 گزینه «1»

$$\left. \begin{aligned}f_{\max} &= |a| + b = 3 \\ f_{\min} &= -|a| + b = -7\end{aligned} \right\} \Rightarrow b = -2, |a| = 5$$

اما تابع در $x = 0$ نزولی است، پس $a > 0$ است.

$$\Rightarrow f(x) = 5 \cos x - 2$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5 \cos \frac{\pi}{3} - 2 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

12 گزینه «4»

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+4}}{1 + \sqrt[3]{x}} &= \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+3}} - \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} \\ &= \frac{\frac{2}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{-3}{2}\end{aligned}$$

13 گزینه «1»

$y = 3$ مجانب افقی و $x = -\frac{1}{4}$ مجانب قائم است.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{bx^2 + 7}{4x^2 + ax + 1} = \frac{b}{4} - 3 \Rightarrow b = 12$$

$x = -\frac{1}{4}$ هم ریشه مخرج است.

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = 3$$

14 گزینه «4»

با توجه به این که حاصل حد وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، برابر مقدار متناهی 2 شده است و چندجمله‌ای مخرج از درجه 2 است پس درجه چندجمله‌ای صورت نیز باید برابر 2 باشد:

$$\begin{aligned} a - 2 = 0 &\Rightarrow a = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3}{bx^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{bx^2} = \frac{2}{b} \\ \Rightarrow \frac{2}{b} = 2 &\Rightarrow b = 1 \Rightarrow a - b = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

15 گزینه «4»

با توجه به حد داده شده، مخرج دارای ریشه مضاعف $x = 2$ است:

$$-x^2 + 4x - a^2 = -(x - 2)^2 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

به ازای $a = 2$ حاصل حد برابر $-\infty$ می‌شود پس $a = -2$ قابل قبول است. حال ضابطه تابع f را می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{-x}}$$

با توجه به دامنه، تابع f در همسایگی راست $x = 0$ تعریف نشده است. در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + 2}{\sqrt{-x}} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

می‌دانیم $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ پس داریم:

$$3 \sqrt{2} (\sin x + \cos x) = \sin^6 x + 7$$

$$\Rightarrow \sin^6(x + \frac{\pi}{4}) = \sin^6 x + 7$$

با توجه به این که $8 \leq \sin^6 x + 7 \leq \sin^6 x + 7$ و $6 \leq \sin(x + \frac{\pi}{4}) \leq 6$ است. داریم:

$$\sin^6 x + 7 = 6 \Rightarrow \sin^6 x = -1 \quad \text{الف)}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{x \in (0, 2\pi)} x = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}$$

$$\text{ب)} \sin^6(x + \frac{\pi}{4}) = 6 \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$$

$$\Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{x \in (0, 2\pi)} x = \frac{\pi}{4}$$

اشتراک جواب‌های به دست آمده برابر $x = \frac{\pi}{4}$ است. در نتیجه معادله یک جواب دارد.

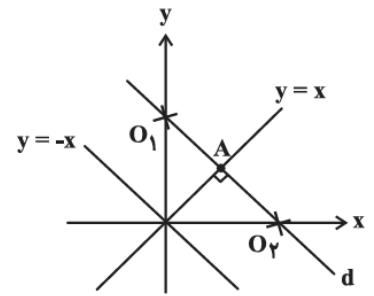
ماتریس مورد نظر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \\ kA = \begin{bmatrix} 2k & 1 \\ 1 & k \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^3 - kA = \begin{bmatrix} 8 - 2k & 1 \\ 1 & 5 - k \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{ماتریس اسکالر}} 8 - 2k = 5 - k \Rightarrow k = 3$$

مکان هندسی مراکز دایره‌هایی که بر هر دو نیمساز نواحی مختصات (خطوط $y = x$ و $y = -x$) مماس باشد، خطوط نیمساز این دو خط (یعنی محور x ها و y ها) را تشکیل می‌دهد. همچنین مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که از نقطه A روی خط $y = x$ گذشته و بر خط $y = x$ مماس باشند، خط گذرا از A و عمود بر خط $y = x$ می‌باشد. خط محورها مختصات را در دو نقطه (O_1, O_2) قطع می‌کند. بنابراین مسئله 2 جواب دارد.



$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0 \\ y - x - 1 = 0 \Rightarrow y = x + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + (x + 1)^2 - 2x - 4(x + 1) + 4 = 0$$

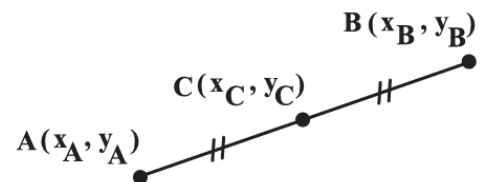
$$\Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$$

اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ مختصات نقاط برخورد خط و دایره باشند، داریم:

$$S = x_A + x_B = -\frac{b}{a} = \frac{4}{2} = 2$$

حال طبق شکل زیر می‌توانیم بگوییم:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2}{2} = 1$$



$$|A| = (\log_3^+)^2 - (\log_3^-)^2 = (\log_3^+ - \log_3^-)(\log_3^+ + \log_3^-)$$

$$= \log_3^+ \times \log_3^- = \log_3^+ \Rightarrow {}^6|A| = \frac{3}{2} *$$

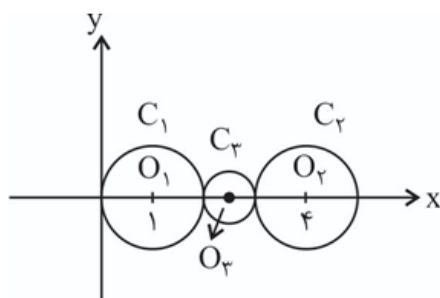
با جایگذاری عبارت * در دترمینان B خواهیم داشت:

$$B = \begin{bmatrix} {}^6|A| & {}^2|A| \\ {}^3|A| & {}^3{}^6|A| \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = {}^6|A| \times {}^3{}^6|A| - {}^2|A| \times {}^3|A|$$

$$= {}^6{}^3|A| - {}^6|A| = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{8}$$

$$C_1: x^2 - 8x + y^2 + 5 = 0 \Rightarrow \text{مرکز: } O_1(4, 0) \text{ و شعاع: } R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(-8)^2 - 4(5)}$$

$$C_2: x^2 - 2x + y^2 = 0 \Rightarrow \text{مرکز: } O_2(1, 0) \text{ و شعاع: } R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(-2)^2} = 1$$



مطابق شکل مرکز دایره‌ی C_3 (دایره مماس خارج با C_1 و C_2)، نقطه $O_3\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ و شعاع آن $R_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ است، پس معادله آن به صورت زیر است:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - 5x + \frac{25}{4} + y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\square \quad \square \quad \text{سطر اول} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \square \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\square \quad \square \quad \text{سطر اول} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

طبق دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس های 3×3 داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (8 + 9 + 0) - (12 + 6 + 0) = -1$$

$$||A|A| = |-A| = (-1)^3 |A| = (-1)(-1) = 1$$

وارون وارون یک ماتریس، برابر خود آن ماتریس است، پس کافی است وارون وارون ماتریس ضرایب دستگاه را به دست آورده و در ماتریس مجهولات ضرب کنیم.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{((A^{-1})^{-1})=A} A = \frac{1}{-\frac{1}{5}} \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های ماتریس مقادیر معلوم دستگاه، برابر $3 + 4 = 7$ است.

در تساوی داده شده $3I$ را به طرف راست منتقل کرده و سپس از ماتریس A در سمت چپ فاکتور می‌گیریم:

$$A^T - 5A^T + A = -3I \Rightarrow A(A^T - 5A + I) = -3I$$

$$\xrightarrow{\times(-\frac{1}{3})} A \times (-\frac{1}{3})(A^T - 5A + I) = I$$

می‌دانیم برای ماتریس وارون‌پذیر A ، $AA^{-1} = I$ است، پس با توجه به رابطه فوق داریم:

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}(A^T - 5A + I)$$

$$\begin{cases} m = -2 \Rightarrow -y + 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \\ m = -1 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases} \Rightarrow W(-3, 3) : \text{مرکز دایره}$$

$$(خط مماس) d : x + y - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow WH = R = \frac{|-3 + 3 - \sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}} = 1$$

$$O(0, 0), W(-3, 3) \Rightarrow OW = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

کمترین فاصله نقاط دایره از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OW - R = 3\sqrt{2} - 1$$

مختصات مرکز و شعاع دایره مورد نظر را می‌یابیم:

$$x^2 + y^2 - 3x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز: } W = \left(\frac{-(-3)}{2}, -\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) \\ \text{شعاع: } R = \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

چون خط $y + 3x = k$ بر دایره مماس است، پس فاصله مرکز این دایره از خط مماس برابر شعاع دایره است:

$$\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\left| -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} - k \right|}{\sqrt{1+9}} \Rightarrow \frac{10}{2} = |4 - k|$$

$$\Rightarrow 4 - k = \pm 5 \Rightarrow k = 9, -1$$

ابتدا وارون ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^{-1})^T = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 13 & -8 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

حال طبق فرض داریم:

$$(A^{-1})^T = mA^{-1} + nI \Rightarrow \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 13 & -8 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{m}{11} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\times 11} \begin{bmatrix} 13 & -8 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = 11m \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 11n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 13 & -8 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44m + 11n & -33m \\ 11m & 22m + 11n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 11m = 6 \\ 22m + 11n = 1 \Rightarrow 11n = -11 \\ \text{2} \times \text{6} \\ \Rightarrow 11n = -1 \Rightarrow 22n = -2 \\ 11m - 22n = 6 - (-2) = 8 \end{cases}$$

دترمینان را محاسبه کرده و برابر صفر قرار می‌دهیم؛ (نسبت به سطر دوم بسط می‌دهیم)

$$0 + (8 - 1) - x(2x + 2 + 3) = 0$$

$$7 - 2x^2 - 5x = 0 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = -\frac{5}{2} \\ P = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{7}{2}} = \frac{5}{7}$$

30 گزینه «3»

تعداد یال‌های گراف کامل هم‌رتبه‌G برابر است با:

$$q(K_{10}) = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

گراف G، 20 یال کمتر از K_{10} دارد. برای رسم 20 یال حداقل 7 رأس لازم است ($q(K_7) = \binom{7}{2} = 21 > 20$). پس از گراف کامل مرتبه 10، 20 یال را به صورت فشرده، از یک مجموعه 7 رأسی جدا می‌کنیم. لذا سه رأس دیگر از درجه 9 باقی خواهد ماند، که حداکثر تعداد رئوس ممکن است.

31 گزینه «3»

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{یک مسیر به طول 2} \Rightarrow acb \\ \text{دو مسیر به طول 3} \Rightarrow acdb, aecb \\ \left. \begin{array}{l} \text{چهار مسیر به طول 5} \Rightarrow \\ \text{acedb, aecdb} \\ \text{aedcb, afecb} \end{array} \right\} \\ \text{دو مسیر به طول 5} \Rightarrow afecdb, afecdb \end{array} \right.$$

پس در کل 9 مسیر داریم.

32 گزینه «4»

طبق فرض می‌دانیم q عددی زوج است، پس:

$$\begin{aligned} q = 2t \Rightarrow (6q + 5)^2 &= (12t + 5)^2 = 144t^2 + 120t + 25 \\ &= 24 \underbrace{(6t^2 + 5t + 1)}_k + 1 = 24k + 1 \end{aligned}$$

بنابراین مجموع ضرایب جمله‌ها در چندجمله‌ای k برابر است با:

$$6 + 5 + 1 = 12$$

33 گزینه «4»

ابتدا فرم کلی اعدادی را پیدا می‌کنیم که 5 برابر آن‌ها به علاوه 9، بر 11 بخش‌پذیر باشد:

$$\begin{aligned} 5a + 9 &\equiv 0 \Rightarrow 5a \equiv -9 \Rightarrow 5a \equiv -20 \\ \xrightarrow[\substack{\div 5 \\ (5, 11)=1}]{\div 5} a &\equiv -4 \Rightarrow a = 11k - 4 \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

بزرگ‌ترین عدد طبیعی دو رقمی a، به ازای $k = 9$ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} a = 11k - 4 &\xrightarrow{k=9} a = 11 \times 9 - 4 = 95 \\ \Rightarrow \text{مجموع ارقام} &= 9 + 5 = 14 \end{aligned}$$

34 گزینه 3

$$63x + 77y = 273 \xrightarrow{\div 7} 9x + 11y = 39$$

$$9x \equiv 39 \Rightarrow -2x \equiv 6 \xrightarrow[\substack{\div (-2) \\ (-2, 11)=1}]{\div (-2)} x \equiv -3$$

$$x = 11k - 3 \xrightarrow{k=10} x_{\min} = 107$$

مجموع ارقام:

$$1 + 0 + 7 = 8$$

35 گزینه «2»

در یک گراف کامل از مرتبه p , $q = \frac{p(p-1)}{2}$, $s = p - 1$, Δ است،

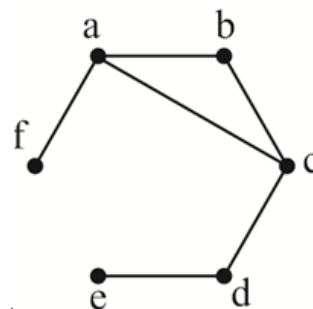
پس داریم:

$$q = \Delta - 2 \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = (p-1)^2 - 2(p-1)$$

$$\xrightarrow{\div (p-1)} \frac{p}{2} = p - 1 - 2 \Rightarrow \frac{p}{2} \Rightarrow 2p - 4 = p \Rightarrow p = 4$$

36 گزینه «2»

اگر رئوس گراف را مطابق شکل نام‌گذاری کنیم، آن گاه دورهای به طول 3 عبارت‌اند از: abca و bcdب



37 گزینه «1»

اگر دو عدد دارای رقم یکان برابر باشند، به پیمانه 10 هم نشت هستند، پس داریم:

$$a^2 - 1 \equiv 4a + 6 \Rightarrow a^2 - 4a - 7 \equiv 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a - 7 + 2 \times 10a \equiv 0 \Rightarrow a^2 + 6a - 7 \equiv 0$$

$$\Rightarrow (a-1)(a+7) \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} a-1 \equiv 0 \Rightarrow a \equiv 1 \Rightarrow a^2 + a \equiv 2 \\ a+7 \equiv 0 \Rightarrow a \equiv -7 \equiv 3 \Rightarrow a^2 + a \equiv 2 \end{cases}$$

38 گزینه «2»

می‌دانیم از هر سه عدد متوالی، یکی بر 3 بخش‌پذیر است. حال فرض کنیم $a \equiv k$ ، در این صورت داریم:

بررسی گزینه‌ها:

$$\begin{cases} a + 2 \equiv k + 2 \\ a + 4 \equiv k + 4 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} a + 3 \equiv k + 3 \\ a + 6 \equiv k + 6 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} a + 5 \equiv k + 5 \\ a + 10 \equiv k + 10 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} a + 7 \equiv k + 7 \\ a + 14 \equiv k + 14 \end{cases} \quad (4)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در گزینه‌های «1»، «3» و «4»، سه عدد داده شده با اعداد متوالی k ، $k+1$ و $k+2$ به پیمانه 3 هم‌نشت هستند، پس یکی قطعاً بر 3 بخش‌پذیر است. به عنوان مثال نقض گزینه «2»، می‌توان $a=1$ را در نظر گرفت که هیچ کدام از اعداد 1، 4 و 7 بر 3 بخش‌پذیر نیستند.

طبق روابط بازگشتی داریم:

$$5x^2 + 3y^2 \geq 2(-x + 5y - 2) + 3xy$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 3y^2 \geq -2x + 10y - 4 + 3xy$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 3y^2 + 2x - 10y - 3xy + 4 \geq 0$$

(طرفین نامعادله را در 2 ضرب می‌کنیم.)

$$\xrightarrow{\times 2} 10x^2 + 6y^2 + 4x - 20y - 6xy + 8 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6xy + 9x^2) + (25y^2 - 20y + 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3x)^2 + (5y-2)^2 \geq 0 \quad (*)$$

عبارت (*) حاصل جمع چند مربع کامل است و می‌دانیم که اعداد مربع کامل اعدادی بزرگتر مساوی صفر می‌باشند. پس مجموع چند مربع کامل هم بزرگتر مساوی صفر می‌باشد و عبارت (*) همواره درست است و از آنجا که تمامی عبارات با همدیگر هم‌ارز هستند، نامساوی اولیه و عبارت (*) هم‌ارز هستند.

40 گزینه «2»

اثبات گزاره (الف): برهان خلف:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$$

$$\xrightarrow{\times abcd} bcd + acd + abd + abc = abcd$$

فرض خلف نادرست و حکم درست است. فرد = زوج $\Rightarrow$

اثبات گزاره (ب):

$$(2k+1)^2 + (2k+3)^2$$

$$= 4k^2 + 4k + 1 + 4k^2 + 12k + 9$$

$$= 8k^2 + 16k + 10$$

زوج $2k$

مثال نقض گزاره (پ):

اگر عدد گویا را صفر و عدد گنگ را $\sqrt{3}$ انتخاب کنیم، حاصل ضرب آن‌ها برابر صفر و عددی گویاست. مثال نقض گزاره (ت):

$$k = 2 \Rightarrow 8(2) + 1 = 17 \text{ که مربع عدد فرد نیست}$$

41 گزینه «1»

به بررسی عبارات می‌پردازیم:

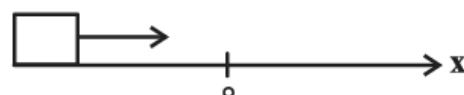
الف) نادرست؛ در حرکت بر خط راست، در صورتی مسافت طی شده و اندازه جابه‌جایی برابرند که متحرک بدون تغییر جهت حرکت کند.

ب) درست؛ طبق رابطه $\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$ و چون همواره $\Delta t > 0$ است، دو بردار سرعت متوسط و جابه‌جایی هم‌جهت هستند.

پ) نادرست؛ از آنجا که اندازه جابه‌جایی و مسافت طی شده توسط یک جسم لزوماً برابر نیستند، بنابراین اندازه سرعت متوسط و تندى متوسط نیز الزاماً برابر نیستند.

ت) نادرست؛ مسافت طی شده همواره بزرگتر یا مساوی اندازه جابه‌جایی است.

ث) نادرست؛ در مثال شکل زیر، با این‌که سرعت مثبت است اما جسم در حال نزدیک شدن به مبدأ محور است.



طبق نمودار حرکت با سرعت ثابت است، پس:

$$x_A = v_A t + x_{0A} \Rightarrow x_A = v_A t - 2$$

$$x_B = v_B t + x_{0B} \Rightarrow x_B = v_B t + 4$$

دو متحرک در لحظه $t = 5$ s به هم می‌رسند:

$$x_A = x_B \xrightarrow{t=5s} 5v_A - 2 = 5v_B + 4$$

$$v_A - v_B = 1/2 \frac{m}{s}$$

فاصله 2 متحرک در لحظه $t = 8$ s برابر است با:

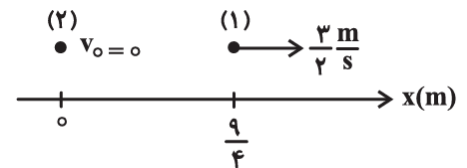
$$|x_A - x_B| = |(v_A t + x_{0A}) - (v_B t + x_{0B})| = |8v_A - 2 - 8v_B - 4| = |8(v_A - v_B) - 6| = |8(1/2) - 6| = |4 - 6| = 2 \text{ m}$$

ابتدا با استفاده از معادلات $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ و $v = at + v_0$ مکان و سرعت متحرک اول را پس از 3 ثانیه می‌یابیم:

$$x_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 3^2 + 0 \times 3 + 0 = \frac{9}{4} \text{ m}$$

$$v_1 = \frac{1}{2} \times 3 + 0 = \frac{3}{2} \frac{m}{s}$$

حال x_1 و v_1 را به عنوان مکان و سرعت اولیه متحرک (1) هنگامی که متحرک (2) از $x_0 = 0$ شروع به حرکت می‌کند در نظر گرفته و داریم:



$$\begin{cases} x'_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} t^2 + \frac{3}{2} t + \frac{9}{4} \\ x_2 = \frac{1}{2} \times 2 t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = \frac{t^2}{4} + \frac{3}{2} t + \frac{9}{4} \\ x_2 = t^2 \end{cases}$$

حال لحظه‌ای که دو متحرک به یکدیگر می‌رسند را می‌یابیم:

$$x'_1 = x_2 \Rightarrow \frac{t^2}{4} + \frac{3}{2} t + \frac{9}{4} = t^2 \Rightarrow \frac{3}{4} t^2 - \frac{3}{2} t - \frac{9}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ s} & \text{غ ق} \\ t = 3 \text{ s} & \text{ق ق} \end{cases}$$

از لحظه‌ای که سرعت دو متحرک یکسان می‌شود تا لحظه‌ای که به هم می‌رسند، فاصله آن‌ها کاهش می‌یابد:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{2} t + \frac{3}{2} \\ v_2 = 2t \end{cases} \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow \frac{1}{2} t + \frac{3}{2} = 2t \Rightarrow t = 1 \text{ s}$$

بنابراین بازه زمانی مد نظر سوال از $t_1 = 1$ s (لحظه برابر سرعت‌ها) تا $t_2 = 3$ s (لحظه به هم رسیدن) می‌باشد:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 3 - 1 = 2 \text{ s}$$

44 گزینه «4»

در لحظه $t = 4$ s مکان دو متحرک با هم برابر می‌شود:

$$x_A = x_B \quad (*)$$

$$v_A = \frac{26 - 20}{3} = 2 \frac{m}{s}$$

$$x_A = v_A t + x_{A,0} \xrightarrow{x_{A,0} = 20 \text{ m}} x_A = 2t + 20$$

$$\xrightarrow{t=4 \text{ s}} x_A = 28 \text{ m} \xrightarrow{(*)} x_B = 28 \text{ m}$$

از طرفی داریم:

$$x_B = \frac{1}{2} a_B t^2 + v_{B,0} t + x_{B,0} \xrightarrow{x_B = 28 \text{ m}, t = 4 \text{ s}} \\ v_{B,0} = 12 \frac{m}{s}, x_{B,0} = 0$$

$$28 = \frac{1}{2} a_B \times 4^2 + 12 \times 4 + 0 \Rightarrow a_B = -2/5 \frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_B = -2/5 \vec{i} \left(\frac{m}{s^2} \right)$$

45 گزینه «1»

2 ثانیه دوم حرکت یعنی از $t_1 = 2$ s تا $t_2 = 4$ s و داریم:

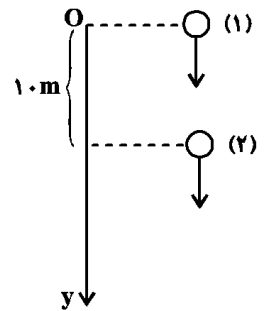
$$t_1 = 2 \text{ s} \Rightarrow v_1 = 3(2)^2 - 8 = 4 \frac{m}{s}$$

$$t_2 = 4 \text{ s} \Rightarrow v_2 = 3(4)^2 - 8 = 40 \frac{m}{s}$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{40 - 4}{4 - 2} = 18 \frac{m}{s^2}$$

با انتخاب جهت مثبت به سمت پایین و محل رها شدن گلوله اول به عنوان مبدأ مختصات، داریم:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + y_0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}gt^2 \\ y_2 = \frac{1}{2}g(t-1)^2 + 10 \end{cases}$$



توجه کنید که چون گلوله (2)، یک ثانیه بعد از گلوله (1) رها شده است زمان حرکت آن $(t-1)$ است. همچنین مکان اولیه گلوله (2) برابر $y_0 = 10\text{m}$ است.

ابتدا زمان به هم رسیدن دو گلوله را می‌یابیم.

$$y_1 = y_2 \xrightarrow{g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g(t-1)^2 + 10$$

$$\Rightarrow 10t - 5 = 0 \Rightarrow t = 1/2 \text{ s}$$

پس تا این لحظه فاصله دو گلوله در حال کاهش است. چون در لحظه به هم رسیدن، سرعت گلوله‌ها متفاوت است، پس از این لحظه، فاصله دو گلوله افزایش می‌یابد.

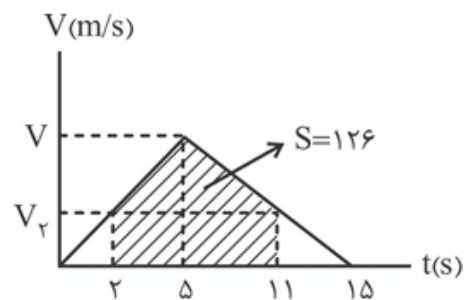
$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = gt = 10 \times 1/2 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v_2 = g(t-1) = 10 \times 0/2 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

47 گزینه «2»

$$0 < t < 2\text{s} \quad \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \xrightarrow{t=2\text{s}} \Delta x = 8 + 2v_0$$

$$2\text{s} < t < 3\text{s} \quad \Delta x' = \frac{1}{2}a(3-t)^2 + v_0(3-t) = 10 + v_0$$

$$\Delta x = 8 + \Delta x' \rightarrow v_0 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



$$\rightarrow \frac{v}{v_r} = \frac{5}{2} \rightarrow \boxed{v_r = 0.4v}$$

$$\rightarrow v_r = v_{11}$$

$$\rightarrow \frac{v}{v_{11}} = \frac{10}{6} \rightarrow \boxed{v_{11} = 0.6v}$$

$$S_1 = \frac{(v_r + v) \times 3}{2} = 2.1v$$

$$2.1v + 6.2v = 126 \rightarrow v = 20 \frac{m}{s}$$

$$S_r = \frac{(v_r + v) \times 6}{2} = 6.2v$$

$$\frac{20}{v_{11}} = \frac{10}{3} \rightarrow v_{11} = 6 \frac{m}{s}$$

49 گزینه «4»

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\substack{\Delta t = 6s \\ s_{av} = 5 \frac{m}{s}}]{\Delta t = 6s} 5 = \frac{\ell}{6} \Rightarrow \ell = 30 \text{ m}$$

اگر مکان جسم در $t = 0$ را x_0 در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\ell = |9 - x_0| + |0 - (9)| \Rightarrow 30 = |9 - x_0| + 9$$

$$\Rightarrow 21 = |9 - x_0| \xrightarrow{x_0 < 9} x_0 = 9 - 21 = -12 \text{ m}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{fs} - x_0}{6 - 0} = \frac{0 - (-12)}{6} = 2 \frac{m}{s}$$

50 گزینه «1»

می‌دانیم، شتاب متوسط متحرک بین دو لحظه از زمان برابر شیب پاره‌خطی است که نقاط نظیر آن دو لحظه در نمودار سرعت - زمان را به یکدیگر وصل می‌کند. بنابراین، در بازه‌های زمانی $(t_1 \text{ تا } t_2)$ ، $(t_1 \text{ تا } t_3)$ و $(t_2 \text{ تا } t_3)$ شیب پاره‌خطی که نقاط نظیر هر دو لحظه را به هم وصل می‌کند، مثبت و در بازه زمانی (صفر تا t_1) منفی است.

51 گزینه «3»

با توجه به قانون هوک داریم:

$$F_e = kx \Rightarrow k = \frac{F_e}{x}$$

حال با توجه به نمودار می‌توان نوشت:

$$\frac{k_A}{k_B} = \frac{\frac{F_{eA}}{x_A}}{\frac{F_{eB}}{x_B}} = \frac{\frac{4}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

52 گزینه «4»

موارد (الف) و (ب) درست‌اند. در حرکت دایره‌ای یکنواخت، بردار سرعت همواره مماس بر مسیر حرکت جسم است و توجه کنید که جهت بردار سرعت تغییر می‌کند اما اندازه آن ثابت است، یعنی در حرکت دایره‌ای یکنواخت بردار سرعت جسم تغییر جهت می‌دهد اما تندی جسم ثابت است (علت نادرستی (ب)). همچنین توجه کنید که نیروی مرکزگرای وارد بر جسم همواره به سمت مرکز دایره و در نتیجه عمود بر مسیر و جابه‌جایی جسم است. پس کار انجام شده توسط آن برابر با صفر است:

$$(W = Fd \cos 90^\circ = 0)$$

53 گزینه «4»

از رابطه $a_c = \frac{v^2}{r}$ داریم:

$$\frac{a_A}{a_B} = \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 \times \left(\frac{R_B}{R_A}\right) \Rightarrow 4 = 2 \times \frac{R_B}{R_A} \Rightarrow \frac{R_B}{R_A} = 2$$

54 گزینه «2»

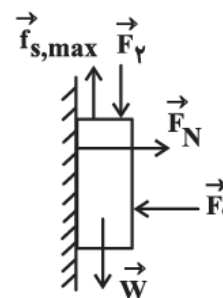
با توجه به رابطه شتاب گرانشی داریم:

$$g' = \frac{1}{9}g \Rightarrow \frac{GM_e}{(R_e + h)^2} = \frac{1}{9} \frac{GM_e}{R_e^2}$$

$$\Rightarrow (R_e + h)^2 = 9R_e^2 \Rightarrow R_e + h = 3R_e \Rightarrow h = 2R_e$$

$$\Rightarrow n = \frac{h}{R_e} = 2$$

چون نیروی $\vec{F}_y$ رو به پایین است، پس از وارد شدن آن به جسم، جسم در آستانه لغزش رو به پایین قرار می‌گیرد. با توجه به این‌که جسم در آستانه لغزش است، برآیند نیروهای وارد بر جسم در راستای قائم برابر با صفر می‌شود.



$$W = mg = 0.5 \times 10 = 1.5 \text{ N}$$

$$F_{\text{net } y} = 0 \Rightarrow f_{s, \text{max}} = F_y + W \Rightarrow f_{s, \text{max}} = 1.5 + 1.5 = 3 \text{ N}$$

نیرویی که از طرف دیوار به چوب وارد می‌شود، برابر با برآیند نیروی اصطکاک و نیروی عمودی سطح است، بنابراین:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_{s, \text{max}}^2} \Rightarrow 5 = \sqrt{(F_N)^2 + 3^2}$$

$$\Rightarrow 25 = (F_N)^2 + 9 \Rightarrow (F_N)^2 = 16 \Rightarrow F_N = 4 \text{ N}$$

$$\mu_s = \frac{f_{s, \text{max}}}{F_N} = \frac{3}{4} = 0.75 \quad \text{در آخر داریم:}$$

ابتدا اندازه نیروی کشسانی فنر را با استفاده از قانون هوک به دست می‌آوریم:

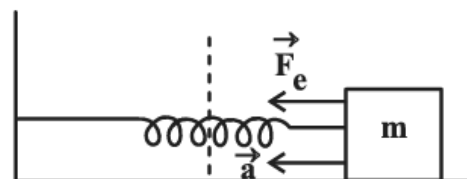
$$F_e = kx \xrightarrow[k=3/6 \frac{\text{N}}{\text{cm}} = 360 \frac{\text{N}}{\text{m}}]{x=25 \times 10^{-2} \text{ m}} F_e = (360)(25 \times 10^{-2}) = 90 \text{ N}$$

با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_{\text{net}} = ma \xrightarrow[m=5 \text{ kg}]{F_{\text{net}}=F_e=90 \text{ N}} 90 = 5a \Rightarrow a = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

با توجه به این‌که فنر نیرویی به طرف نقطه تعادل به جسم وارد می‌کند، می‌توان گفت که نیروی فنر و در نتیجه شتاب حرکت جسم در لحظه

رها شدن آن، خلاف جهت محور x است. پس: $\vec{a} = (-18 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \vec{i}$



با توجه به ثابت بودن جهت و اندازه نیرو شتاب وارد جسم را می‌یابیم:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow a = \frac{F_{\text{net}}}{m} \xrightarrow[m=800 \text{ g} = 0.8 \text{ kg}]{F_{\text{net}}=2 \text{ N}} a = \frac{2}{0.8} = 2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

حال با توجه به ثابت بودن شتاب و رابطه شتاب متوسط داریم:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \xrightarrow[v_1 = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v_2 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}]{a = 2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} 2.5 = \frac{5 - (-5)}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 4 \text{ s}$$

نیروی مرکزگرای ماهواره را نیروی گرانشی بین ماهواره و زمین تأمین می‌کند.

$$\begin{cases} F_{\text{گرانشی}} = G \frac{mM_e}{r^2} \\ F_{\text{مرکزگرا}} = m \frac{v^2}{r} \end{cases} \Rightarrow \frac{GmM_e}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} \quad (*)$$

از طرفی سرعت خطی ماهواره برابر است با:

$$v = r\omega \xrightarrow{\omega = \frac{2\pi}{T}} T = \frac{2\pi r}{v} \xrightarrow{(*)} T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_e}{r}}} \\ T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_e} \Rightarrow T^2 \propto r^3$$

59 گزینه 1

با استفاده از قانون دوم نیوتون بر حسب تکانه، می‌توان نوشت:

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{\vec{P}_2 - \vec{P}_1}{t_2 - t_1} \xrightarrow{\vec{P} = (mv)\vec{i}} \\ \vec{F}_{\text{net}} = \frac{(m t_2 - m) \vec{i} - (m t_1 - m) \vec{i}}{t_2 - t_1} = m \vec{i}$$

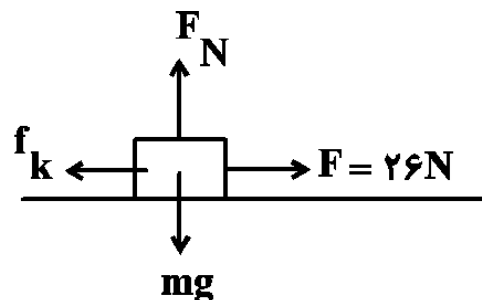
یعنی در هر بازه زمانی دلخواه نیروی خالص متوسط، ثابت است.

ابتدا نیروی اصطکاک ایستایی آستانه حرکت را محاسبه می‌کنیم.

$$f_{s, \max} = \mu_s F_N \xrightarrow{F_N = mg} f_{s, \max} = \mu_s mg$$

$$\xrightarrow[\substack{\mu_s = 0.5 \\ m = 5 \text{ kg}}]{g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}} F_{s, \max} = 0.5 \times 50 = 25 \text{ N}$$

چون این نیرو از نیروی $F = 26 \text{ N}$ کوچکتر است پس جسم شروع به حرکت می‌کند و نیروی اصطکاک وارد بر آن از نوع نیروی اصطکاک جنبشی است.

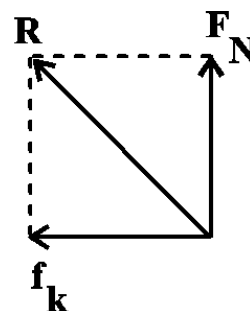


از قانون دوم نیوتون داریم:

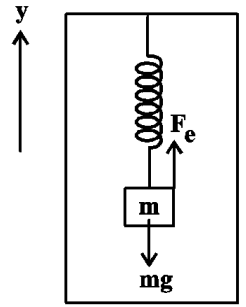
$$F - f_k = ma \Rightarrow F - \mu_k F_N = ma \xrightarrow{F_N = mg} F - \mu_k mg = ma \Rightarrow 26 - 0.4 \times 50 = 5a \Rightarrow a = 1/5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند، برآیند دو نیروی عمود بر هم F_N و f_k است.

$$R = \sqrt{f_k^2 + F_N^2} = \sqrt{(20)^2 + (50)^2} = 10\sqrt{4 + 25} = 10\sqrt{29} \text{ N}$$



چون جهت شتاب آسانسور رو به پایین است، داریم:



$$F_e - mg = ma \xrightarrow{a < 0} F_e = m(g - a) \xrightarrow{F_e = kx}$$

$$4x = 3(10 - 2) \Rightarrow x = 6 \text{ cm} \quad kx = m(g - a) \xrightarrow{k = 400 \frac{\text{N}}{\text{m}} = 4 \frac{\text{N}}{\text{cm}}} \quad m = 2 \text{ kg} \quad a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

طول نهایی فنر برابر است با:

$$\ell = \ell_0 + x = 42 + 6 = 48 \text{ cm}$$

62 گزینه «1»

$$T = \frac{t}{n} = \frac{60}{30} = 2 \text{ s}$$

$$V = r\omega = r \frac{2\pi}{T} = 2 \times \frac{2\pi}{2} = 2\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 5 \times 4\pi^2 = 10\pi^2$$

63 گزینه «3»

طول پارمخط 4 cm است، پس A = 2 cm. در هر ثانیه یک بار طول پارمخط را می‌رود، پس یک دور کامل یا یک رفت و برگشت، 2 ثانیه طول خواهد کشید. (T = 2 s)

$$v_{\max} = A\omega = A \cdot \frac{2\pi}{T} \Rightarrow v_{\max} = 2 \times \frac{2\pi}{2} = 2\pi \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

64 گزینه «4»

انرژی جنبشی نوسانگر هنگام گذر از حالت تعادل، بیشینه و برابر انرژی مکانیکی آن است.

$$\begin{cases} E = K_{\max} = \frac{1}{2}J \Rightarrow E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 0.3 \times A^2 \times 400\pi^2 \\ \omega = 2\pi f = 20\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 40 = A^2 \times 400\pi^2 \Rightarrow A^2 = \frac{0.1}{\pi^2}$$

$$\underline{\underline{\pi^2 \simeq 10}} \quad A^2 = \frac{1}{10} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ m}$$

بنابراین معادله حرکت را می‌توانیم بنویسیم:

$$x = A \cos \omega t = 0.1 \cos 20\pi t$$

65 گزینه «3»

در دو انتهای مسیر (نقاط برگشت)، انرژی جنبشی نوسانگر برابر صفر و نوسانگر در مکان بیشینه خود، یعنی $x = \pm A$ است.

$$K = \frac{1}{2}kx^2 \xrightarrow{x=\pm A, K=0} 0 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{0.25}{400} \Rightarrow A = \frac{0.5}{20} = \frac{1}{40} \text{ m} = 2.5 \text{ cm}$$

اما در مرکز نوسان انرژی جنبشی نوسانگر بیشینه ($K = K_{\max}$) و مکان نوسانگر برابر صفر است. ($x = 0$)

$$K = \frac{1}{2}kx^2 \xrightarrow{x=0, K=K_{\max}} K_{\max} = \frac{1}{2}k \times 0$$

$$\Rightarrow K_{\max} = 0.25 \text{ J}$$

$$K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \xrightarrow{K_{\max}=0.25 \text{ J}, m=20 \text{ g} = \frac{20}{1000} \text{ kg}}$$

$$0.25 = \frac{1}{2} \times \frac{20}{1000} v_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max} = 5 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow v_{\max} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 500 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$v_{\max} = A\omega \xrightarrow{A=2.5 \text{ cm}, v_{\max}=500 \frac{\text{cm}}{\text{s}}} 500 = 2.5 \omega$$

$$\Rightarrow \omega = 200 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

66 گزینه «1»

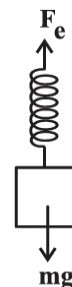
نوسانگر در بازه زمانی $\frac{T}{4}$ تا $\frac{3T}{4}$ در مکان‌های مثبت قرار دارد همچنین در بازه زمانی $\frac{T}{4}$ به سمت مرکز نوسان در حال حرکت است و حرکت تندشونده می‌باشد. بنابراین پاسخ مورد نظر بازه زمانی 0 تا $\frac{T}{4}$ است.

67 گزینه «2»

ابتدا ثابت فنر را در حالت اول حساب می‌کنیم.

$$F_e = mg \Rightarrow kx = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{x}$$

$$\xrightarrow{m=0.2 \text{ kg}, g=10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, x=2/5 \times 10^{-2} \text{ m}} k = \frac{0.2 \times 10}{2/5 \times 10^{-2}} = 80 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$



می‌دانیم در حرکت نوسانی بیشینه مقدار انرژی جنبشی همان مقدار انرژی مکانیکی است و داریم:

$$K_{\max} = E = \frac{1}{2}kA^2 \quad K = 80 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad \xrightarrow{A=2 \times 10^{-2} \text{ m}} \frac{1}{2} \times 80 \times (2 \times 10^{-2})^2 = 16 \times 10^{-3} \text{ J} = 16 \text{ mJ}$$

با استفاده از دوره تناوب آونگ ساده داریم:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{\ell_2}{\ell_1}} \xrightarrow{T_2=T_1+\frac{2/5}{100}T_1, T_1=1/35T_1} \\ 1/35 = \sqrt{\frac{\ell_2}{\ell_1}} \xrightarrow{1/35=\frac{9}{8}} \frac{\ell_2}{\ell_1} = \frac{81}{64} \quad (*)$$

از طرفی داریم:

$$\ell_2 - \ell_1 = 11 \text{ cm} \xrightarrow{(*)} \frac{81}{64} \ell_1 - \ell_1 = 11$$

با جای‌گذاری در رابطه دوره تناوب آونگ ساده داریم:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}} \xrightarrow{\ell_1=64 \text{ cm}} T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{0/64}{\pi^2}} = 2 \times 0/8 = 1/6 \text{ s}$$

69 گزینه «1»

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0/2}{50}} = 0/4 \text{ s} \\ \frac{t}{T} = \frac{0/5}{0/4} = \frac{5}{4} \rightarrow t = T + \frac{T}{4} \rightarrow \begin{cases} \ell = 5A \\ |\Delta x| = A \end{cases} \\ \frac{\ell}{|\Delta x|} = 5$$

70 گزینه «1»

تنها نیرویی که به نوسانگر هماهنگ ساده وارد می‌شود، نیروی فنر است. بنابراین اگر قانون دوم نیوتون را برای آن بنویسیم، داریم:

$$F_e = ma \Rightarrow kx = m|a| \Rightarrow k \times 10^{-2} = 2 \times 4 \Rightarrow k = 800 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

71 گزینه 2

انرژی مکانیکی نوسانگر برابر مجموع انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی آن است.

$$E = U + K$$

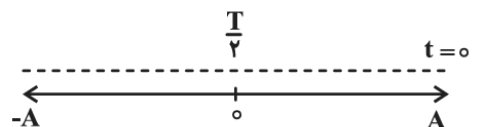
رابطه فوق را برای هنگامی که انرژی پتانسیل و جنبشی نوسانگر با یکدیگر برابر می‌شود می‌نویسیم:

$$E = K + K \Rightarrow E = 2K$$

$$E = 2 \times \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) \Rightarrow 8 \times 10^{-3} = 0/1v^2 \Rightarrow v^2 = 8 \times 10^{-2}$$

$$v = \frac{2\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

در دو انتهای مسیر نوسانی (نقاط بازگشت)، اندازه شتاب نوسانگر، بیشینه می‌شود.



$$\frac{T}{2} = \frac{1}{12} s \Rightarrow T = \frac{1}{6} s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{1}{6}} = 12\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

مسافتی که نوسانگر در مدت نصف دوره می‌پیماید، دو برابر دامنه ($2A$) است.

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = \frac{1}{12} s, \ell = 2A]{s_{av} = 6 \cdot \frac{\text{cm}}{s}} 6 \cdot 0 = \frac{2A}{\frac{1}{12}} \Rightarrow 2A = 5$$

$$\Rightarrow A = 2.5 \text{ cm}$$

معادله مکان- زمان نوسانگر را می‌نویسیم و مکان آن را در لحظه‌های $t_1 = 0$ و $t_2 = \frac{1}{9} s$ به دست می‌آوریم:

$$x = A \cos \omega t \xrightarrow[\omega = 12\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}]{A = 2.5 \text{ cm}} x = 2.5 \cos(12\pi)t$$

$$t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2.5 \cos 0 = 2.5 \text{ cm}$$

$$t_2 = \frac{1}{9} s \Rightarrow x_2 = 2.5 \cos\left(12\pi \times \frac{1}{9}\right) = 2.5 \cos \frac{4\pi}{3}$$

$$= 2.5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.25 \text{ cm}$$

اکنون می‌توانیم اندازه جابه‌جایی نوسانگر را حساب کنیم:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = -1.25 - 2.5 = -3.75 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow |\Delta x| = 3.75 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \\ g &= \frac{GM_e}{r^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} = \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2} = \frac{r_2}{r_1} \xrightarrow{r=h+R_e}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{R_e}{2} + R_e}{R_e} = \frac{3}{2}$$

ابتدا لحظه‌ای را که سنگ با سطح آب رودخانه برخورد می‌کند، مشخص می‌کنیم:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow -10 = -5t^2 \Rightarrow t^2 = 2 \Rightarrow t = \sqrt{2} \simeq 1/4 = \frac{1}{5}s$$

برای محاسبه زمان رسیدن صدای برخورد تا شخص داریم:

$$\Delta y = v \times \Delta t \Rightarrow 10 = 300 \times \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{10}{300} = \frac{1}{30}s$$

بنابراین زمان خواسته شده برابر است با:

$$\Rightarrow \Delta t' = \frac{1}{5} + \frac{1}{30} = \frac{42 + 1}{30} \Rightarrow \frac{43}{30}s$$

75 گزینه «3»

$$x = v_0t + x_0 \rightarrow \begin{cases} x_A = 10t + 100 \\ x_B = 20t - 200 \end{cases}$$

$$x_A - x_B = 20 \rightarrow -10t + 300 = 20 \rightarrow t = 28s$$

$$x_B - x_A = 20 \rightarrow 10t' - 300 = 20 \rightarrow t' = 32s$$

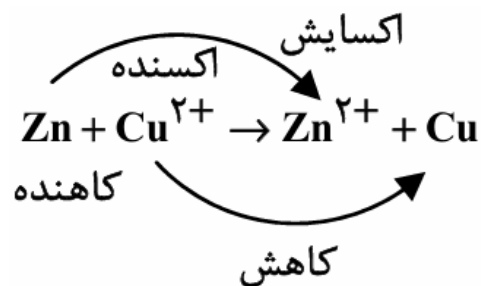
$$t' - t = 4s$$

76 گزینه «3»

گزینه‌های آ و پ درست است.

بررسی گزینه‌ها:

(آ) با توجه به واکنش زیر، فلز روی عامل کاهنده و یون مس عامل اکسنده است.

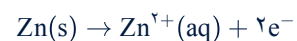


(ب) با توجه به واکنش فوق، به تدریج از غلظت یون مس (Cu^{2+}) و شدت رنگ آبی محلول کاسته می‌شود. همچنین به ازای کاهش یک مول Cu^{2+} ($\text{Cu}^{2+} + 2e^- \rightarrow \text{Cu}$)، 64 گرم به جرم تیغه فلز روی افزوده می‌شود و همزمان با اکسایش یک مول Zn ($\text{Zn(s)} \rightarrow \text{Zn}^{2+}(\text{aq}) + 2e^-$)، 65 گرم از جرم تیغه کم می‌شود که در نتیجه می‌توان گفت با جابه‌جایی دو مول الکترون، مجموعاً یک گرم از جرم تیغه کاسته می‌شود.

(پ) با توجه به این نکته که رسوب سرخ رنگ مس بر روی تیغه روی تشکیل می‌شود، بنابراین با فرض کامل بودن این فرایند، کاهش جرم حداقلی تیغه فلزی به ازای واکنش هر مول فلز روی برابر 1 گرم است.

$$325 \text{ g Zn} \times \frac{1 \text{ mol Zn}}{65 \text{ g Zn}} \times \frac{\text{کاهش جرم Zn}}{1 \text{ mol Zn}} = 5 \text{ g کاهش جرم}$$

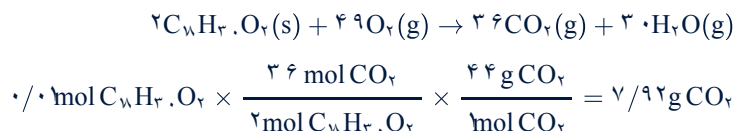
(ت)



موارد سوم و چهارم درست هستند. بررسی موارد:

مورد اول: فرمول کلی اسیدی خطی و یک عاملی $C_nH_{2n}O_2$ است، این اسید با 18 کربن (17 کربن در گروه R و یک کربن در گروه $-COOH$ است) فرمول $C_{18}H_{36}O_2$ را دارد، به ازای هر پیوند دوگانه دو اتم هیدروژن کسر می‌شود بنابراین فرمول مولکولی اسید $C_{18}H_{34}O_2$ است.

مورد دوم: هر گروه عاملی $-COOH$ با یک مول $NaOH$ واکنش می‌دهد این اسید یک عاملی است و با یک مول $NaOH$ واکنش می‌دهد. مورد سوم:



مورد چهارم: با داشتن 3 پیوند دوگانه با 3 مول گاز هیدروژن واکنش می‌دهد و از این طریق جرم مولی اسید افزایش می‌یابد اما طبق رابطه $\frac{\text{جرم م ها کر}}{\text{جرم م رک}} = \text{ر جرم کر}$ ، به دلیل ثابت ماندن شمار اتم‌های کربن و جرم آن‌ها، با افزایش مقدار مخرج، درصد جرمی کربن کاهش می‌یابد.

در بین مخلوط‌های گفته شده شیر، سس مایونز و مخلوط آب و روغن و صابون همگی کلونید هستند. از طرفی مخلوط آب و قند نیز یک محلول است. از آنجا که محلول‌ها و کلونیدها همگی مخلوط‌هایی پایدار هستند، در بین گزینه‌های داده شده 3 کلونید و 4 مخلوط پایدار وجود دارند.

بررسی موارد:

(آ) نادرست؛ مجموع ضرایب استوکیومتری عنصرها (Fe و O) برابر 7 خواهد بود:



(ب) درست؛ عدد اکسایش هر اتم کربن در اتین (C_2H_2) برابر 1- و عدد اکسایش H در NaH نیز برابر 1- می‌باشد.

(پ) نادرست؛ چگالی $Mg(l)$ از چگالی $MgCl_2(l)$ کمتر است.

(ت) درست، نخستین فلز گروه 14 قلع می‌باشد.

(ث) درست؛ فلزهای دارای E° منفی با محلول اسیدها، واکنش داده و گاز H_2 تولید می‌کنند زیرا قدرت کاهندگی آن‌ها از H_2 بیشتر است.

اگر فرایند خوردگی را مشابه سلول گالوانی در نظر بگیریم، قطره آب نقش محلول‌های الکترولیت و قطعه آهن نقش مدار بیرونی را (رسانای فلزی) ایجاد می‌کند و همچنین پایگاه آندی و زیر قطره آب قرار می‌گیرند. توجه داشته باشید که در محیط‌های اسیدی (محیطی که کاغذ pH به رنگ قرمز در می‌آید) ولتاژ سلول افزایش می‌یابد.



$$? \text{ mol HA} = \frac{3}{2} \text{ g NaOH محلول} \times \frac{25 \text{ g NaOH خالص}}{100 \text{ g NaOH محلول}} \times \frac{1 \text{ mol NaOH}}{40 \text{ g NaOH}} \times \frac{1 \text{ mol HA}}{1 \text{ mol NaOH}} = 0.02 \text{ mol HA}$$

$$[\text{HA}] = \frac{n}{V} = \frac{0.02 \text{ mol}}{0.4 \text{ L}} = 0.05 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-2/7} = 10^{1/7} \times 10^{-2} = 2 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{H}^+] = M \cdot \alpha \Rightarrow 2 \times 10^{-2} = 0.05 \alpha \Rightarrow \alpha = 0.4$$

$$\xrightarrow{\times 100} \alpha\% = 4\%$$

درصد یونش

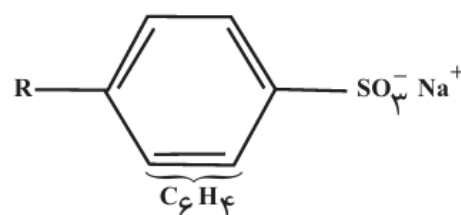


$$K_a = \frac{[\text{A}^-][\text{H}^+]}{[\text{HA}]} \xrightarrow{[\text{A}^-]=[\text{H}^+], [\text{HA}] \approx M}$$

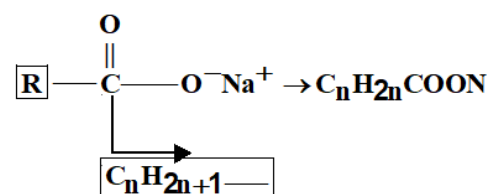
$$K_a = \frac{(2 \times 10^{-2})^2}{5 \times 10^{-2}} = 8 \times 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

85 گزینه «1»

ساختار کلی یک پاک‌کننده غیرصابونی به صورت زیر است: (R گروه آلکیل یا گروه هیدروکربنی است.)



یک پاک‌کننده صابونی جامد با فرمول کلی R – COONa دارای یک زنجیر هیدروکربنی است که می‌تواند سیر شده یا سیر نشده باشد. در صورت سؤال به توضوح اشاره شده است که زنجیرهای هیدروکربنی R در هر دو پاک‌کننده، سیر شده هستند، پس R یک گروه آلکیل است. بنابراین می‌توان نوشت:



تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن در پاک‌کننده صابونی (صابون جامد) با حلقه بنزنی پاک‌کننده صاب و (که مشخص شد چهارم اتم هیدروژن دارد) برابر با 31 اعلام شده است. بنابراین شمار اتم‌های هیدروژن در صابون جامد (یعنی مقدار $n + 1$) برابر خواهد بود با:

$$(2n + 1) - 4 = 31 \rightarrow n = 15$$

توجه: معادله بالا را نمی‌توان به صورت $(2n + 1) - 4$ نوشت، زیرا اولاً مقدار n منفی به دست می‌آید و ثانیاً شمار اتم‌های هیدروژن صابون جامد نمی‌تواند کوچکتر از 4 باشد، زیرا در این صورت طول زنجیر هیدروکربنی بسیار کوتاه خواهد بود و نمی‌تواند خاصیت پاک‌کنندگی داشته باشد. در نتیجه فرمول صابون جامد به صورت $\text{C}_{15}\text{H}_{31}\text{COONa}$ می‌شود. حالا می‌توان جرم مولی آن را حساب کرد:

$$\text{C}_{15}\text{H}_{31}\text{COONa} \rightarrow 15(12) + 31(1) + 2(16) + 23 = 306 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

مادامی که در رابطه با گروه R در پاک‌کننده غیرصابونی اطلاعاتی در دسترس نباشد، نمی‌توان با اطمینان و قاطعیت در رابطه با سایر گزینه‌ها به صورت دقیق و به یقین اظهار نظر کرد.

معادله یونش تعادلی اسیدهای ضعیف با فرمول کلی HA به صورت زیر است: (منظور از α درصدیونش است.)

	$\text{HA(aq)} \rightleftharpoons \text{H}^+(\text{aq}) + \text{A}^-(\text{aq})$
غلظت اولیه	M 0 0
تغییرات غلظت	$-\alpha M$ $+\alpha M$ $+\alpha M$
غلظت تعادلی	$\frac{M-\alpha M}{M(1-\alpha)}$ $\frac{\alpha M}{M(1-\alpha)}$ $\frac{\alpha M}{M(1-\alpha)}$
	$\text{مجموع غلظت یون ها} = 2 \times M$

در سامانه تعادلی این دسته از اسیدها، منظور از غلظت مولکول ها همان غلظت تعادلی اسید اولیه و منظور از غلظت یون ها، دو برابر غلظت یون هیدرونیوم است. بنابراین می توان نوشت:

$$\frac{\text{غلظت HF در محلول (I)}}{\text{مجموع غلظت یون ها در محلول (II)}} = \frac{M_I(1-\alpha_I)}{2\alpha_I M_{II}} = \frac{0.2 \times (1-0.24)}{2 \times 0.2 \times 0.9} = 4.8/8$$

گام اول: ابتدا با استفاده از pH محلول غلظت یون هیدروکسید محلول نهایی و در ادامه شمار مول های آن را حساب می کنیم:

$$\text{pH} = 3.7 \rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-3.7} = 10^{-4} \times 10^{0.3} = 2 \times 10^{-4} \text{ mol. L}^{-1} \xrightarrow{[\text{H}^+][\text{OH}^-] = 1 \times 10^{-14}}$$

$$[\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{[\text{H}^+]} = \frac{10^{-14}}{2 \times 10^{-4}} = 0.5 \text{ mol. L}^{-1} \xrightarrow{V = 0.5 \text{ L}}$$

$$n_{\text{OH}^-} = 0.5 \times 0.5 = 0.25 \text{ mol OH}^-$$

گام دوم: پتاسیم اکسید (K_2O) و سدیم اکسید (Na_2O) اکسیدهای فلزی بوده و بر اثر انحلال در آب، مطابق با معادله واکنش های ارائه شده، به ترتیب بازهای قوی پتاس (KOH) و سود (NaOH) را تولید می کنند. در نتیجه انحلال هر مول K_2O و همچنین هر مول Na_2O با پدید آمدن دو مول باز قوی و در نتیجه دو مول یون هیدروکسید همراه است. بنابراین هم ارزی های زیر را می توان نتیجه گرفت:



گام سوم: در محلول نهایی مجموعاً 0.25 مول یون هیدروکسید از انحلال اکسیدهای فلزی پدید آمده است، بنابراین تساوای زیر را می توان تشکیل داد:

انحلال هر مول K_2O ، Na_2O با تولید 2 مول OH^- همراه است.

$$0.25 = \frac{2/35 \text{ g K}_2\text{O}}{94} \times 2 + \frac{x \text{ g Na}_2\text{O}}{62} \times 2$$

$\text{mol K}_2\text{O (خالص)}$ $\text{mol Na}_2\text{O (خالص)}$

گام چهارم: مقدار x از تساوای بالا برابر با 6/2 به دست می آید. یعنی در نمونه ناخالص سدیم اکسید که 15/5 گرم جرم دارد. 6/2 گرم آن را سدیم اکسید (Na_2O) خالص تشکیل می دهد. برای محاسبه درصد خلوص Na_2O در این نمونه $\% P_{\text{Na}_2\text{O}}$ کافی است جرم سدیم اکسید خالص را بر جرم کل نمونه تقسیم کرده و در 100 ضرب کنیم:

$$\% P_{\text{Na}_2\text{O}} = \frac{6/2}{15/5} \times 100 = 40\%$$

اگر غلظت $[\text{H}^+]$ در محلول از اسیدی بیشتر باشد، فارغ از قدرت اسیدی، pH محلول آن کمتر است.

بررسی سایر موارد:

(1) در HF لزوماً غلظت $[\text{H}^+]$ با $[\text{HF}]$ تعادل برابر نیست.

(2) گاز هیدروژن کلرید در آب یونش پیدا می کند و نه تفکیک یون

(3) قدرت اسیدی فرمیک اسید از استیک اسید بیشتر است.

نیترواسید از هیدروسیانیک اسید قوی‌تر است.

بررسی عبارت‌ها:

عبارت «اول»: درست است. pH نیترواسید از HCN کوچک‌تر است.

عبارت «دوم»: درست است. $\frac{0.4}{40} = 0.01 \text{ mol NaOH} = \text{OH}^-$

اسید $0.1 \left(\frac{\text{mol}}{\text{L}} \right) \times 0.1 \text{ L} = 0.01 \text{ mol}$

عبارت سوم: درست است. نیتریک اسید به‌طور کامل یونیده می‌شود.

عبارت چهارم درست است.

برای درک رفتار الکترودهای X و Y در مقایسه با مس و قلع، ما نیاز داریم تا پتانسیل کاهشی استاندارد (E) مربوط به نیم سلولهای X و Y را تعیین کنیم. این کار با استفاده از مقادیر emf داده شده برای سلولهای گالوانی استاندارد $X - Cu$ و $Cu - Y$ امکان پذیر است. emf یک سلول گالوانی استاندارد از تفاضل پتانسیل کاهشی استاندارد کاتد (نیم سلولی که در آن کاهش رخ می دهد و دارای پتانسیل کاهشی بالاتری است) و آند (نیم سلولی که در آن اکسایش رخ می دهد و دارای پتانسیل کاهشی پایین تری است) به دست می آید (رابطه زیر).

$$emf = E^{\circ}(\text{آند}) - E^{\circ}(\text{کاتد})$$

با تعیین پتانسیلهای کاهشی استاندارد برای X و Y می توانیم جایگاه آنها را در جدول پتانسیل کاهشی استاندارد نسبت به مس و قلع تعیین کرده و در نتیجه، قدرت اکسیدکنندگی و کاهندگی یون ها و فلزات مربوطه را با یکدیگر مقایسه کنیم (در اینجا فرض کردیم که X و Y فلز هستند). این مقایسه به ما کمک می کند تا پیش بینی کنیم که در سلولهای گالوانی مختلف کدام فلز نقش آند و کدام فلز نقش کاتد را ایفا خواهد کرد و جهت جریان الکترون چگونه خواهد بود.

تحلیل سلول گالوانی (1): در سلول گالوانی (1) که از الکترودهای X و مس تشکیل شده است، جهت جریان الکترون از الکتروده X به سمت الکتروده مس گزارش شده است. از آنجایی که الکترون ها از آند به سمت کاتد در مدار خارجی جریان می یابند، این بدان معناست که مس نقش کاتد و X نق آند را ایفا می کند. بنابراین می توان نوشت:

$$0.08 = +0.34 - E^{\circ}(X^{n+}/X) \rightarrow E^{\circ}(X^{n+}/X) = -0.74V$$

تحلیل سلول گالوانی (2): در سلول گالوانی (2) که از الکترودهای Y و مس تشکیل شده است، جهت جریان الکترون از الکتروده مس به سمت الکتروده Y گزارش شده است. از آنجایی که الکترون ها از آند به سمت کاتد در مدار خارجی جریان می یابند، این بدان معناست که Y نقش کاتد و مس نقش آند را ایفا می کند. بنابراین می توان نوشت:

$$0.46 = E^{\circ}(Y^{n+}/Y) - (+0.34) \rightarrow E^{\circ}(Y^{n+}/Y) = +0.80V$$

نیم واکنش کاهشی			$E^{\circ}(V)$
اکسند قوی تر ↑	$Y^{n+}(aq) + ne^{-} \rightarrow Y(s)$		+0.80
	$Cu^{2+}(aq) + 2e^{-} \rightarrow Cu(s)$		+0.34
	$Sn^{2+}(aq) + 2e^{-} \rightarrow Sn(s)$		-0.15
	$X^{n+}(aq) + ne^{-} \rightarrow X(s)$		-0.74
↓ تضعیف تر			

بررسی همه گزینه ها:

گزینه «1»: با توجه به پتانسیلهای کاهشی استاندارد به دست آمده ($X < Sn < Cu < Y$) قدرت اکسیدکنندگی کاتیون ها (تمایل به پذیرش الکترون) با افزایش پتانسیل کاهشی استاندارد افزایش می یابد. بنابراین ترتیب قدرت اکسیدکنندگی یا قدرت اکسیدکنندگی کاتیون ها به صورت $Y^{n+} < Sn^{2+} < Cu^{2+} < Y^{n+}$ خواهد بود. یعنی که یون Y^{n+} قوی ترین عامل اکسیدکننده (اکسند) و یون X^{n+} ضعیف ترین عامل اکسیدکننده (اکسند) در میان این چهار گونه است.

گزینه «2»: حساب می کنیم:

$$E^{\circ}(Y^{n+}/Y) - E^{\circ}(X^{n+}/X) = 0.80 - (-0.74) = 1.54V$$

گزینه «3»: در سلول (1) $(X - Cu)$ پتانسیل کاهشی مس $(+0.34V)$ بیشتر از $X (-0.74V)$ است، لذا جهت جریان از X به Cu است. با جایگزینی X با قلع $(-0.74V)$ پتانسیل کاهشی مسی همچنان بیشتر از قلع است، پس جهت جریان تغییر نمی کند. در سلول (2) $(Cu - Y)$ پتانسیل کاهشی Y $(+0.80V)$ بیشتر از مس $(+0.34V)$ است، لذا جریان از Cu به Y است. با جایگزینی Y با قلع، پتانسیل کاهشی مس بیشتر از قلع می شود بنابراین جهت جریان از قلع به مس تغییر می کند. بنابراین، جهت جریان فقط در سلول (2) تغییر می کند. در واقع باین جایگزینی ها، در سلول (2) برخلاف سلول (1) جهت جریان معکوس می شود.

گزینه «4»: اگر افزایش جرم مس در سلول (1) معادل کاهش جرم مس در سلول (2) باشد، این معنی را می دهد که تعداد مول های مس واکنش داده در هر دو نیم سلول یکسان بوده است. از آنجایی که در واکنش های اکسایش (در آند) و کاهش (در کاتد) یون های مس $Cu^{2+}(aq) + 2e^{-} \rightleftharpoons Cu(s)$ با ازای هر مول مس که واکنش می دهد (چه رسوب کند و چه اکسید شود) دقیقاً دو مول الکترون مبادله می شود. بنابراین اگر تعداد مول های مس واکنش داغده در هر دو سلول برابر باشد، به طور قطع تعداد مول های الکترون های مبادله شده در هر دو فرایند نیز با یکدیگر برابر خواهد بود.

قسمت اول: معادله واکنش را به روش «اکسایش _ کاهش» موازنه می‌کنیم:



نسبت مولی بین Cl_2 (کاهنده) و MnO_4^- (اکسنده) برابر 1 به 2 به دست آمد. حالا می‌توان سایر گونه‌ها را موازنه کرد. ببینید:



مجموع ضرایب مواد در معادله موازنه شده واکنش برابر 13 است.

قسمت دوم: بر اثر مصرف هر مول گونه اکسنده یعنی MnO_4^- تعداد 5 مول الکترون مبادله می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\text{mol MnO}_4^- \sim 5 \text{ mole}^- \rightarrow \frac{0.4 \text{ mol MnO}_4^-}{1} = \frac{x \text{ mole}^-}{5} \Rightarrow x = 2 \text{ mole}^-$$

92 گزینه 3

با توجه به واکنش خود به خودی زنگ زدن آهن فقط عبارت دوم نادرست است.



93 گزینه «4»



بررسی عبارت‌ها:

عبارت «اول»: درست است.

عبارت «دوم»: درست است. ضریب HF، برابر مجموع ضرایب سایر مواد است.

عبارت «سوم»: درست است.



عبارت چهارم: درست است.

ولتاژ (پتانسیل) یک سلول الکتروشیمیایی، به غلظت الکترولیت‌های آن بستگی دارد بر اساس معادله زیر (که مربوط به کتاب درسی نظام قدیم سالیان بسیار دور می‌باشد!) با افزایش غلظت الکترولیت در آند، E سلول کاهش و با افزایش غلظت الکترولیت موجود در نیم‌سلول کاتدی، E سلول افزایش می‌یابد.

$$A(s) + B^{b+}(aq) \rightarrow A^{a+}(aq) + B(s)$$

$$\rightarrow E_{COH} = E^{\circ} - \frac{0.0591}{n_e} \log \left(\frac{[A^{a+}]}{[B^{b+}]} \right) \rightarrow \begin{cases} [B^{b+}] \uparrow \rightarrow E \uparrow \\ [A^{a+}] \uparrow \rightarrow E \downarrow \end{cases}$$

بنابراین در سلول «روی – هیدروژن»، با افزودن H^+ ، ولتاژ سلول افزایش و با اضافه کردن یکی از نمک‌های روی (حاوی Zn^{2+}) و افزایش غلظت Zn^{2+} ، ولتاژ سلول کاهش می‌یابد.

* با افزایش دما، ولتاژ سلول کاهش می‌یابد.

* تغییر جرم الکترودها، روی ولتاژ سلول تأثیری ندارد ولی روی مدت زمان عملکرد و کارایی سلول مؤثر است. (پتانسیل سلول به جنس آند و کاتد، دما و غلظت الکترولیت‌ها بستگی دارد.)

$$C_n H_{2n+1} = R$$

$$H \text{ تعداد} \div U = 2n + 1 = 29 \Rightarrow n = 14$$

$$\underbrace{14C}_R + \underbrace{6C}_{\text{حلقه بنزن}} = 20C$$

$$C_n H_{2n-7} SO_3 Na \xrightarrow{n=20} C_{14} H_{21} SO_3 Na = \text{فرمول عمومی پاک‌کننده‌های غیرصابونی}$$

$$\text{جرم مولی پاک‌کننده غیرصابونی} = (20 \times 12) + (21 \times 1) + (3 \times 32) + (3 \times 16) + (1 \times 23) = 376 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$C_7 H_6 O_2 \text{ اسید بنزویک} = (7 \times 12) + (6 \times 1) + (2 \times 16) = 122 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$376 - 122 = 254$$

واکنش‌های (1)، (2) و (4) حاوی گونه آزاد بوده و قطعاً جزو واکنش‌های اکسایش-کاهش محسوب می‌شوند؛ اما در واکنش (3) که مربوط به واکنش خنثی شدن جوش شیرین با سولفوریک اسید می‌باشد، گونه آزادی وجود نداشته و عدد اکسایش تمامی عناصر در دو سمت واکنش برابر است. هرگاه در واکنش، در یک سمت یک گونه آزاد عنصری (مثل F_2) داشته باشیم و در سمت دیگر آن عنصر در ترکیب وجود داشته باشد، واکنش از نوع اکسایش-کاهش است.

بررسی موارد درست:

(آ) ثابت یونش یک اسید، بیانی از میزان پیشرفت فرایند یونش تا رسیدن به تعادل است.

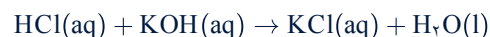
(ب) در لحظه تعادل غلظت همه مواد شرکت کننده در تعادل ثابت است.

(پ) آمونیاک همانند $NaOH$ یک باز تک ظرفیتی به شمار می‌آید.

(ث) باران اسیدی حاوی 2 اسید قوی H_2SO_4 و HNO_3 و باران معمولی حاوی اسید ضعیف H_2CO_3 می‌باشد. تنها HNO_3 اسیدی تک‌پروتون‌دار است.

تنها مورد نادرست (مورد ت): pH شیره معده در حدود 5/1 است و در زمان استراحت pH معده در حدود 3/7 می‌باشد. (pH معده همیشه اسیدی است و خنثی که نمی‌تواند باشد.)

واکنش انجام شده به صورت زیر است.



در ابتدا باید تعداد مول هر یک از واکنش‌دهنده‌ها را تعیین کنیم:

$$\text{KOH مول} = \text{L 0/2} \times \frac{0/75 \text{ mol KOH}}{\text{محلول L}} = 0/5 \text{ mol KOH}$$

$$\text{HCl مول} = \text{L 0/3} \times \frac{0/6 \text{ mol HCl}}{\text{محلول L}} = 0/8 \text{ mol HCl}$$

با توجه به این که مقدار مول HCl بیشتر است، مقدار باقی‌مانده از آن پس از واکنش با اسید برابر است با:

$$0/8 - 0/5 = 0/3 \text{ mol HCl}$$

از آنجا که حجم محلول نهایی برابر با حجم کل محلول‌های مخلوط شده با یکدیگر است، غلظت HCl باقی‌مانده و مقدار pH آن عبارتند از:

$$[\text{H}^+] \simeq [\text{HCl}] = \frac{0/3 \text{ mol}}{(0/2 + 0/3) \text{ L}} = 0/6 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] = -\log(6 \times 10^{-2}) = -\log(2 \times 3 \times 10^{-2}) = (-\log 2) + (-\log 3) + (-\log 10^{-2}) = (-0/3) + (-0/5) + 2 = 1/2$$

معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



ابتدا غلظت مولار محلول هیدروکلریک اسید را تعیین می‌کنیم:

$$[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-0/6} = 10^{-2} \times 10^{1/4} \xrightarrow{\log 5 = 0/7} 10^{-2} \times (10^{0/7})^2 = 25 \times 10^{-2} \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

حال برای بدست آوردن حجم هیدروکلریک اسید بر حسب میلی لیتر داریم:

$$\text{mL HCl} = 336 \text{ mL CO}_2 \times \frac{1 \text{ mol CO}_2}{22400 \text{ mL CO}_2} \times \frac{1 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol CO}_2} \times \frac{1 \text{ L HCl}}{25 \times 10^{-2} \text{ mol HCl}} \times \frac{10^3 \text{ mL HCl}}{1 \text{ L HCl}} = 60 \text{ mL HCl}$$

گزینه «3»: عبارت‌های (آ) و (ب) و (ث) نادرست است.

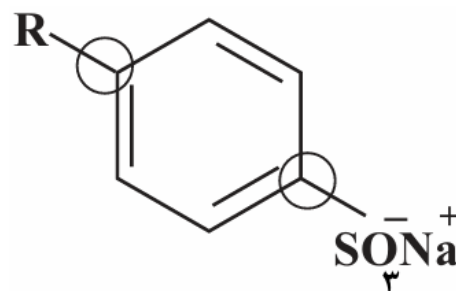
(آ) سه جزء اصلی سلول سوختی: کاتد، آند و غشاء مبادله‌کننده پروتون.

(ب) در قطب منفی (آند)، H_2 اکسیدشده و در قطب مثبت (کاتد)، O_2 کاهش می‌یابد.



(ث) برعکس - در سلول سوختی «متان - اکسیژن» برخلاف سلول سوختی «هیدروژن - اکسیژن» CO_2 هم تولید می‌شود که بر محیط زیست تأثیر نامطلوبی دارد.

- گزینه «1»: نادرست، از صابون گوگرددار به عنوان ضدقارچ پوستی و از بین برنده جوش استفاده می‌شود نه هر پاک‌کننده گوگرداری.
- گزینه «2»: نادرست، به آب دریا و مناطق کویری که دارای مقادیر چشمگیری از یون‌های کلسیم و منیزیم هستند، آب سخت گفته می‌شود نه فلزهای منیزیم و کلسیم.
- گزینه «3»: نادرست، آمونیاک در ساختار خود فاقد OH بوده و یون هیدروکسید در محلول آن، پس از واکنش آمونیاک با آب، آزاد می‌شود.
- گزینه «4»: درست، در پاک‌کننده غیرصابونی با زنجیره آلکیلی سیرشده، کربن‌های مشخص شده با هیچ هیدروژنی پیوند تشکیل نداده‌اند:



- گزینه «2»: دقت کنید مطابق جدول صفحه 23 کتاب درسی، HNO_3 در بین اسیدهای قوی ضعیف‌تر از سایرین است.

واکنش اکسایش- کاهش انجام شده به شکل زیر است:



جرم فلز آلومینیم جدا شده از تیغه:

$$0/6 \text{ mol e}^- \times \frac{2 \text{ mol Al}}{6 \text{ mol e}^-} \times \frac{27 \text{ g Al}}{1 \text{ mol Al}} = 5/4 \text{ g Al}$$

جرم رسوب مس که بر روی تیغه می‌نشیند:

$$0/6 \text{ mol e}^- \times \frac{3 \text{ mol Cu}}{6 \text{ mol e}^-} \times \frac{64 \text{ g Cu}}{1 \text{ mol Cu}} \times \frac{10}{100} = 33/44 \text{ g Cu}$$

از آنجا که جرم Al جدا شده از تیغه از جرم رسوب مس که بر روی تیغه می‌نشیند کمتر است، بنابراین جرم تیغه افزایش می‌یابد.

$$8/04 \text{ g} = 33/44 - 5/4 \text{ : میزان افزایش جرم تیغه}$$

عبارت‌های (ب) و (ت) نادرست‌اند.

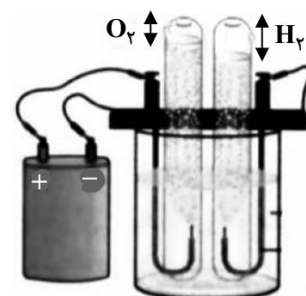
بررسی هر یک از عبارت‌ها:

الف) مطابق واکنش‌های انجام شده در آند و کاتد صحیح است.

(تولید H^+ و محیط اسیدی) $\Rightarrow 2H_2O(l) \rightarrow O_2(g) + 4H^+(aq) + 4e^-$ → قطب مثبت → آند

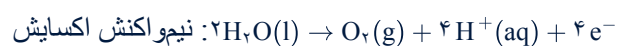
(تولید OH^- و محیط بازی) $\Rightarrow 2H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 2H_2(g) + 4OH^-(aq)$ → قطب منفی → کاتد

ب) با توجه به شکل A و B به ترتیب O_2 و H_2 هستند.



پ) در سلول‌های الکترولیتی برخلاف گالوانی آند به قطب مثبت باتری و کاتد به قطب منفی باتری وصل است ولی همچنان الکترون‌ها در سیم از آند به کاتد حرکت می‌کنند.

ت) نیم‌واکنش‌های انجام شده در فرایند برق‌کافت آب به صورت زیر است:



مورد دوم: جهت حرکت الکترون در مدار بیرونی، از سمت آند (قطب مثبت) به سمت کاتد (قطب منفی) است.

مورد سوم: ترکیب $AgCl$ در آب به شکل رسوب است و به حالت محلول نیست.