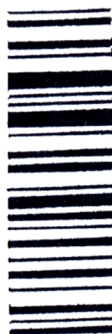




شماره داوطلب
نام خانوادگی و نام
- - -
خراسان رضوی
شهر



سروش اندیشه

مؤسسه فرهنگی هنری

کد آزمون ۱۱۹۲

دفترچه شماره ۱

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.
امام خمینی (ره)
جمهوری اسلامی ایران
وزارت فرهنگ و ارشاد
اسلامی مؤسسه سروش
اندیشه حیات

پاسخنامه آزمون شبیه ساز کنکور

گروه آزمایشی علوم ریاضی

شماره داوطلبی:

نام و نام خانوادگی:

مدت پاسخگویی: ۱۴۵ دقیقه

تعداد سوال: ۱۰۵ عدد

عنوان مواد امتحانی تعداد، شماره سوالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سوال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰ دقیقه
۲	فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه
۳	شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه

برای مشاهده پاسخنامه آزمون به سایت مؤسسه مراجعه نمایید

پاسخ تشریحی درس‌های اختصاصی آزمون ۱۳ تیر ۱۴۰۳ (گروه آزمایشی علوم ریاضی)

ریاضیات

▲ مشخصات سؤال: ساده * ریاضی ۱ (درس ۴، فصل ۳)

۱- پاسخ: گزینه ۲

نکته: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

ابتدا هریک از عبارت‌های a و b را ساده می‌کنیم:

$$a = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^3}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{(\sqrt{2}-1)^3}{2-1} = (\sqrt{2}-1)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{a} = \sqrt{2}-1$$

$$b = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = (\sqrt{3}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{b} = \sqrt{3}-1$$

$$\sqrt{b} - \sqrt[3]{a} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

بنابراین:

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس‌های ۲ و ۳، فصل ۱)

۲- پاسخ: گزینه ۳

نکته: برای حل معادلات گویا، با ضرب طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به‌دست آمده معادله را حل می‌کنیم. جواب‌های به‌دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند.

نکته: به‌طور کلی در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد، روابط زیر برقرار است:

$$S = \frac{-b}{a}, P = \frac{c}{a}$$

دو طرف تساوی را در $(x-2)(x-3)$ ضرب می‌کنیم. فرض کنید $x \neq 2, 3$ باشد، داریم:

$$2(x-2) + 3(x-3) = K(x-2)(x-3) \Rightarrow 5x - 13 = K(x^2 - 5x + 6) \Rightarrow Kx^2 - 5(K+1)x + 6K + 13 = 0$$

$$\text{پس } \alpha + \beta = \frac{5(K+1)}{K} \text{ و } \alpha\beta = \frac{6K+13}{K} \text{ در نتیجه:}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{5(K+1)}{K}}{\frac{6K+13}{K}} = \frac{5K+5}{6K+13} = \frac{30}{43} \Rightarrow 215K + 215 = 180K + 390 \Rightarrow 35K = 175 \Rightarrow K = 5$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس ۵، فصل ۱)

۳- پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر خطوط d و d' به‌ترتیب با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند، آنگاه $mm' = -1$ و برعکس.

نکته: اگر A و B دو نقطه در صفحه مختصات M وسط پاره خط AB باشد، مختصات نقطه M برابر است با:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

طبق شکل فرضی روبه‌رو و با استفاده از نکات، معادلات خطوط AM و CH را به‌دست می‌آوریم و آن‌ها را با هم قطع می‌دهیم:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{5-2}{2+1} = 1 \Rightarrow m_{CH} = -1$$

$$\text{معادله } CH: y = -x + 3$$

$$M = \frac{B+C}{2} = (1, 1) \Rightarrow m_{AM} = \frac{y_A - y_M}{x_A - x_M} = \frac{5-1}{2-1} = 4$$

$$\text{معادله } AM: y = 4x - 3$$

$$-x + 3 = 4x - 3 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$$

حال این دو خط را با هم قطع می‌دهیم:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۱)

۴- پاسخ: گزینه ۱

عبارت داده‌شده به‌ازای $x \geq 1$ تعریف شده است. اگر نامساوی را به‌صورت

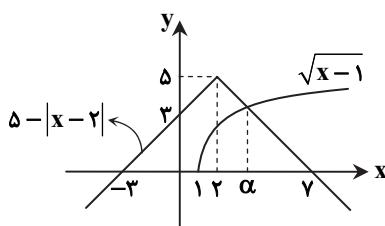
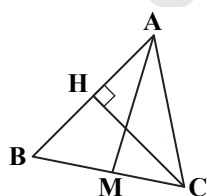
$$\sqrt{x-1} \leq 5 - |x-2|$$

بنویسیم می‌توانیم با رسم توابع دو طرف نامساوی، آن را راحت‌تر حل کنیم. کافی است نقطه برخورد $\sqrt{x-1}$ را با شاخه سمت راست قدرمطلق پیدا کنیم:

$$\sqrt{x-1} = 5 - (x-2) = 7-x$$

$$1 \leq x \leq 7 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x-1 = 49 - 14x + x^2 \Rightarrow x^2 - 15x + 50 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 10 \end{cases}$$

پس مجموعه جواب نامعادله به‌صورت $[1, 5]$ است و $b-a = 4$ است.



۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۱)

نکته: اگر تابعی مانند f روی دامنه‌اش اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، آنگاه وارون آن نیز اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است.

ابتدا تابع f را ساده می‌کنیم و بدون قدرمطلق بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{(2x-6)^2} + |x+1| = 2|x-3| + |x+1| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -3x+5 & x < -1 \\ -x+7 & -1 \leq x \leq 3 \\ 3x-5 & x > 3 \end{cases}$$

با توجه به نکته، یکنوایی یک تابع و وارون آن مثل هم است و این تابع در بازه $(3, +\infty)$ اکیداً صعودی است. وارون آن را محاسبه می‌کنیم:

$$y = 3x - 5 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = 3y - 5 \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3} ; x > 3$$

چون f^{-1} خطی است، پس $a = 0$ است و در نتیجه:

$$g(x) = \frac{x+5}{3} \Rightarrow g(7-a) = g(7) = \frac{12}{3} = 4$$

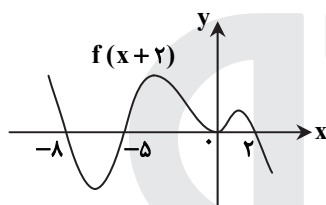
۶- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۱)

نکته: عبارت $y = \log_{g(x)} f(x)$ وقتی تعریف می‌شود که داشته باشیم: $f(x) > 0, g(x) > 0, g(x) \neq 1$

نکته: برای رسم نمودار $y = f(x+k)$ ، کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه $|k|$ واحد در جهت افقی انتقال دهیم. اگر $k > 0$ ، انتقال در جهت منفی و اگر $k < 0$ ، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

نمودار f را دو واحد به چپ انتقال می‌دهیم و سپس عبارت داخل لگاریتم را تعیین علامت می‌کنیم، داریم:



x	-8	-5	0	2
x	-	-	-	+
f(x+2)	+	-	+	-
x	-	+	-	+
f(x+2)	-	+	-	+

پس دامنه تابع به صورت $(-8, -5) \cup (0, 2)$ است. این دامنه شامل $x = -7$ و $x = -6$ ، $x = 1$ است که مجموع آن‌ها برابر -12 است.

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس ۳، فصل ۳)

۷- پاسخ: گزینه ۱

۱ نکته: $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

۲ نکته: $\log_b a^n = n \log_b a$

۳ نکته: $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$

ابتدا با استفاده از نکات اول و دوم یک رابطه را به دست می‌آوریم که در حل این سؤال از آن استفاده می‌کنیم:

$$\log_{b^n} a \stackrel{\text{نکته ۱}}{=} \frac{1}{\log_a b^n} \stackrel{\text{نکته ۲}}{=} \frac{1}{n \log_a b} \stackrel{\text{نکته ۱}}{=} \frac{1}{n} \log_b a$$

پس توان عدد پایه لگاریتم به صورت معکوس به پشت آن منتقل می‌شود، حال فرض کنید $t = \log_2 x$ باشد، داریم:

$$(\log_2 x)^2 = 4 + \frac{9}{3} \log_2 x = 4 + 3 \log_2 x \Rightarrow t^2 = 4 + 3t \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = -1, 4 \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}, \beta = 16 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{32} \Rightarrow \log_{16} \frac{\alpha}{\beta} = \log_{16} \frac{1}{32} = \log_{2^4} 2^{-5} = -\frac{5}{4} \\ \alpha = 16, \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = 32 \Rightarrow \log_{16} \frac{\alpha}{\beta} = \log_{16} 32 = \log_{2^4} 2^5 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

طبق گزینه‌ها گزینه ۱ پاسخ است.

۸- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۱)

نکته: برای رسم نمودار $y = f(x+k)$ ، کافی است نمودار تابع $y = f(x)$ را به اندازه $|k|$ واحد در جهت افقی انتقال دهیم. اگر $k < 0$ ، انتقال در جهت مثبت و اگر $k > 0$ ، انتقال در جهت منفی خواهد بود.
سهمی $y = f(x)$ را در نظر بگیرید. تابع $f(x-2)$ ، نیمساز $y = x$ را در $x = 1$ و $x = 5$ قطع می‌کند. پس $x = 1$ و $x = 5$ ریشه‌های معادله $f(x-2) - x = 0$ هستند، داریم:

$$f(x-2) - x = a(x-1)(x-5) \Rightarrow f(x-2) = a(x-1)(x-5) + x$$

نمودار $f(x-1)$ بر $y = -x$ مماس است، پس معادله $f(x-1) = -x$ ریشه مضاعف دارد، پس:

$$f(x-1) = a(x+1-1)(x+1-5) + x+1 = ax(x-4) + x+1$$

$$y = -x \text{ با } ax(x-4) + x+1 = -x \Rightarrow ax^2 + 2(1-2a)x + 1 = 0.$$

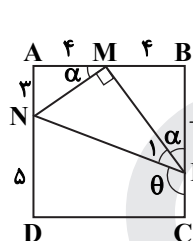
$$\Delta = 0 \Rightarrow 4(1-2a)^2 - 4a = 0 \Rightarrow 4a^2 - 8a + 4 = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ یا } \frac{1}{4} \Rightarrow f(0) = -3a + 2 = -1 \text{ یا } \frac{5}{4}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۲)

۹- پاسخ: گزینه ۳

نکته: $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

فرض کنید $AM = MB = 4$ و $AN = 3$ و $DN = 5$ باشد، بنابراین $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ است در نتیجه $PB = \frac{16}{3}$ می‌شود، داریم:



$$\begin{cases} MN = \sqrt{9 + 16} = 5 \\ MP = \sqrt{16 + \frac{256}{9}} = \frac{20}{3} \Rightarrow \tan \hat{P}_1 = \frac{5}{\frac{20}{3}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \hat{P}_1 = \alpha \end{cases}$$

زاویه θ با دو زاویه دیگر α تشکیل یک زاویه نیم صفحه می‌دهد، پس:

$$\tan \theta = \tan(\pi - 2\alpha) = -\tan 2\alpha = \frac{-2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{-2(\frac{3}{4})}{1 - \frac{9}{16}} = -\frac{24}{7}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۱، فصل ۲)

۱۰- پاسخ: گزینه ۱

نکته: توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

نکته: $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ ، $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

$$f(x) = \frac{a}{2}(1 - \cos(2bx) - \cos(2bx)) = \frac{a}{2} - a \cos(2bx)$$

ابتدا ضابطه تابع را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$\max = \frac{a}{2} + |a| = \frac{3a}{2} = 3 \Rightarrow a = 2$$

روی محور y ها، مینیمم داریم، پس $a > 0$ است، پس:

$$T = \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow a + b^2 = 2 + 4 = 6$$

همچنین طبق نمودار دوره تناوب برابر $\frac{\pi}{2}$ است، پس:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۲)

۱۱- پاسخ: گزینه ۱

نکته: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

نکته: جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = 2k\pi + \pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

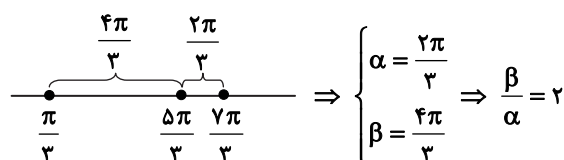
نکته: جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

ابتدا معادله را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\frac{1 + 2 \sin x \cos x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} + 2 \frac{\cos x}{\cos x} \Rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x = \sin x + 2 \cos x \Rightarrow 1 - \sin x + 2 \sin x \cos x - 2 \cos x = 0$$

$$\Rightarrow (1 - \sin x)(1 - 2 \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \text{ (مخرج صفر می‌شود)} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3} \end{cases}$$

روی محور اعداد، جواب‌ها به صورت زیر می‌باشند:



▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۱ (درس ۴، فصل ۵)

۱۲- پاسخ: گزینه ۳

حد ابهام $\frac{0}{0}$ دارد. با ضرب صورت و مخرج در مزدوج صورت، آن را رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(2 - \sqrt{x+2})}{-(x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(4 - x - 2)}{(x^2 - 4)(2 + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = -\frac{1}{8}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2(2 - \sqrt{x+2})}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2(4 - x - 2)}{(x^2 - 4)(2 + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = \frac{3}{16}$$

$$\text{اختلاف حد چپ و راست} = \frac{3}{16} - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{5}{16}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱ (درس ۵، فصل ۵)

۱۳- پاسخ: گزینه ۱

نکته: گوییم تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است هرگاه: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

باید پیوستگی g را در نقاط $x = 1$ و $x = -1$ بررسی کنیم. ضابطه اول به شرطی در $x = 1$ حد راست دارد که صورت کسر عامل $x - 1$ داشته باشد، پس $f(x) = (x-1)(ax+b)$ داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = 3 \Rightarrow a+b=3 \\ \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = g(-1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)}{x-1} = -1 \Rightarrow -a+b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ -a+b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$$

بنابراین:

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)(2x+1) \Rightarrow f(-3) = 20$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس‌های ۱ و ۳، فصل ۳)

۱۴- پاسخ: گزینه ۳

به‌ازای $x = 1$ صورت کسر f برابر صفر است. به شرطی حد f در $x = 1$ برابر $-\infty$ است که مخرج کسر عامل $(x-1)^2$ داشته باشد:

$$ax^2 + bx - 2 = a(x-1)^2 = ax^2 - 2ax + a \Rightarrow \begin{cases} -2a = b \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow b = 4 \Rightarrow f(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 3}}{-2x^2 + 4x - 2}$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xf(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2x - \sqrt{x^2 + 3})}{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x\sqrt{x^2 + 3}}{-2x^2} = \frac{-3}{2}$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * حسابان ۲ (درس ۲، فصل ۴)

۱۵- پاسخ: گزینه ۴

نکته: اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع $f \circ g$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

$$\text{نکته: } (f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

ابتدا مشتق تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$g'(x) = f(\sqrt[3]{x}) + x \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} f'(\sqrt[3]{x})$$

با جای‌گذاری $x = -8$ داریم:

$$g'(-8) = f(-2) - \frac{2}{3} f'(-2)$$

بنابراین به $f(-2)$ و $f'(-2)$ نیاز داریم، پس:

$$f(x) = x\sqrt{3 - \frac{2}{x}} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{3 - \frac{2}{x}} + x \cdot \frac{\frac{2}{x^2}}{2\sqrt{3 - \frac{2}{x}}}$$

$$f(-2) = -4$$

$$f'(-2) = \frac{5}{4}$$

بنابراین حاصل خواسته شده برابر است با:

$$g'(-8) = -4 - \frac{2}{3} \times \left(\frac{5}{4}\right) = -4 - \frac{5}{6} = -\frac{31}{6}$$

دامنه را بازه‌بندی کرده و ضابطه توابع f و f' را به دست می‌آوریم. دقت کنید که f در نقاط صحیح $x = 0$ و $x = 1$ مشتق پذیر نیست.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & -1 < x < 0 \\ x^2 + 1 & 0 \leq x < 1 \\ x^2 - 2x + 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & -1 < x < 0 \\ 2x & 0 < x < 1 \\ 2x - 2 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

هریک از ضابطه‌ها را با ضابطه متناظر خود، مساوی قرار می‌دهیم:

$$f(x) = f'(x) \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 2x + 2 \\ x^2 + 1 = 2x \\ x^2 - 2x + 1 = 2x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, 3 \end{cases}$$

هیچ کدام از جواب‌ها در بازه‌های داده شده، قابل قبول نیستند.

نکته: اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق چپ و راست نامتناهی داشته باشد، در این صورت خط $x = a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a, f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

نکته: فرض کنیم $c \in D_f$ ، نقطه به طول c را یک نقطه بحرانی برای تابع f می‌نامیم، هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد و یا $f'(c)$ موجود نباشد. نکته: برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق ابتدا نقاط بحرانی را مشخص می‌نماییم. در این صورت از بین تمام نقاط بحرانی و نقاط انتهایی بازه، نقطه یا نقاطی که بیشترین مقدار تابع در آن‌ها اتفاق می‌افتد نقاط ماکزیمم مطلق تابع و مقدار تابع در این نقاط مقدار ماکزیمم مطلق تابع است. همچنین در بین نقاط مذکور نقطه یا نقاطی که کمترین مقدار تابع در آن‌ها اتفاق می‌افتد نقاط مینیمم مطلق تابع و مقدار تابع در این نقاط مقدار مینیمم مطلق تابع است.

$x = \frac{1}{3}$ باید ریشه زیر رادیکال باشد، پس:

$$ax - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 6$$

حال نقاط بحرانی تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x+2} - 2\sqrt[3]{6x-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} - \frac{4}{\sqrt[3]{(6x-2)^2}}$$

$$f' = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{(6x-2)^2} = 4\sqrt[3]{(x+2)^2} \Rightarrow \sqrt[3]{6x-2} = 2\sqrt[3]{x+2} \Rightarrow |6x-2| = 8|x+2|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x-2 = 8x+16 \Rightarrow x = -9 \\ 6x-2 = -8x-16 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 7 \end{cases}$$

از طرفی:

$$\begin{cases} f(-2) = 2\sqrt[3]{14} < 7 \\ f(+\infty) = -\infty \end{cases}$$

بنابراین مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر همان ۷ می‌باشد و گزینه ۲ پاسخ است.

نکته: فرض کنیم تابع f در نقطه $x = c$ پیوسته است. در این صورت نقطه $(c, f(c))$ نقطه عطف تابع f است، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) نمودار f در نقطه $(c, f(c))$ خط مماس داشته باشد.

ب) جهت تغير f در نقطه $(c, f(c))$ تغییر کند.

نکته: در تابع دو بار مشتق پذیر f ، نقاط عطف ریشه‌های معادله $f''(x) = 0$ هستند.

در نقطه عطف افقی، f' دارای ریشه حقیقی مضاعف است، داریم:

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 2ax = 2x(2x^2 - 12x + a)$$

باید معادله $2x^2 - 12x + a = 0$ ریشه مضاعف داشته باشد، پس:

$$\Delta = 0 \Rightarrow 144 - 4a = 0 \Rightarrow a = 36 \Rightarrow f(x) = x^4 - 8x^3 + 36x^2 - b$$

$$f''(x) = 12x^2 - 48x + 72 = 12(x^2 - 4x + 3)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1, 3$$

در نقطه عطف $x = 1$ باید عرض تابع برابر صفر باشد، پس:

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1 - 8 + 36 - b = 0 \Rightarrow b = 29$$

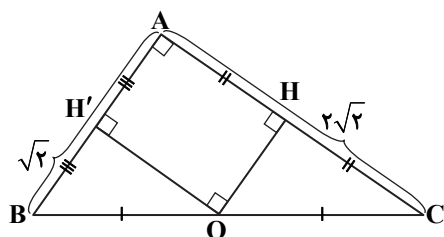
▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۲)

۱۹- پاسخ: گزینه ۱

راه حل اول:

توجه کنید که اضلاع مثلث ABC در رابطه فیثاغورس صدق می کنند.

$$BC^2 = 10, AB^2 + AC^2 = 2 + 8 = 10 \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$



مثلث ABC در رأس A، قائم الزویه است. محل هم‌رسی عمودمنصف‌های مثلث قائم الزویه وسط وتر است، بنابراین طبق شکل روبه‌رو و با استفاده از تالس داریم:

$$\frac{CO}{CB} = \frac{OH}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow OH = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{BO}{BC} = \frac{OH'}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow OH' = \frac{1}{2} AC = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

چهارضلعی AHOH' مستطیل است و مساحت آن برابر است با:

$$S_{AHOH'} = OH \cdot OH' = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

راه حل دوم:

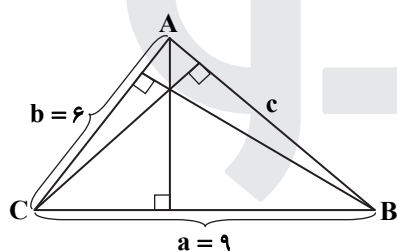
توجه کنید که در شکل فوق، چون O نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌ها است، پس H وسط AC و H' وسط AB است و داریم:

$$S_{AHOH'} = AH \cdot AH' = \frac{1}{2} AC \times \frac{1}{2} AB = \frac{1}{4} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۱ (درس ۲، فصل ۳)

۲۰- پاسخ: گزینه ۲

شکل روبه‌رو را در نظر گرفته و داریم:



$$S = \frac{1}{2} a \times h_a = \frac{9}{2} h_a \Rightarrow h_a = \frac{2}{9} S$$

$$S = \frac{1}{2} b \times h_b = \frac{1}{2} \times 6 \times h_b = 3h_b \Rightarrow h_b = \frac{1}{3} S$$

$$S = \frac{1}{2} c \times h_c \Rightarrow h_c = \frac{2}{c} S$$

مقادیر به دست آمده را در فرض سؤال یعنی رابطه $\frac{h_a + h_b}{2} = h_c$ جای گذاری می کنیم:

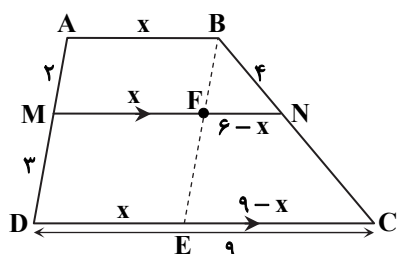
$$\frac{\frac{2}{9} S + \frac{1}{3} S}{2} = \frac{2}{c} S \Rightarrow \frac{\frac{5}{9} S}{2} = \frac{2}{c} S \Rightarrow \frac{5}{9} = \frac{4}{c} \Rightarrow c = \frac{36}{5} = 7 \frac{1}{2}$$

همچنین:

▲ مشخصات سؤال: دشار * هندسه ۱ (درس ۱، فصل ۳)

۲۱- پاسخ: گزینه ۲

از B خطی موازی AD رسم می کنیم تا DC را در نقطه E قطع کند. فرض می کنیم:



$$AB = MF = DE = x$$

$$FN = 6 - x, EC = 9 - x$$

با استفاده از تالس در مثلث BEC، داریم،

$$\triangle BEC: \frac{FN}{EC} = \frac{BF}{BE} = \frac{AM}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{6-x}{9-x} = \frac{2}{5} \Rightarrow 30 - 5x = 18 - 2x$$

$$3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

$$\triangle BEC: \frac{BF}{FE} = \frac{BN}{NC} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{NC} \Rightarrow NC = 6$$

بزرگ‌ترین دوزنقه شکل ABCD و کوچک‌ترین دوزنقه شکل ABNM است، پس خواسته سؤال برابر است با:

$$\frac{AB + BC + CD + AD}{AB + BN + MN + AM} = \frac{4 + 10 + 9 + 5}{4 + 4 + 6 + 2} = \frac{28}{16} = \frac{7}{4}$$

۲۲- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۲ (درس ۳، فصل ۱)

با توجه به شکل روبه‌رو، از مرکز دایره بر AB و DC عمود رسم می‌کنیم.

$$R = 5, OH = 4, OK = 3$$

$$HK = 4 - 3 = 1 \quad \text{اندازه ارتفاع دوزنقه}$$

با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث‌های OBH و OKC داریم:

$$\triangle OBH : HB = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{25 - 16} = 3 \Rightarrow AB = 2BH = 2 \times 3 = 6$$

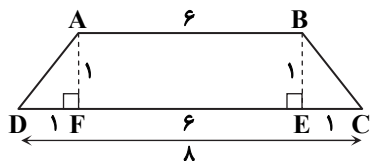
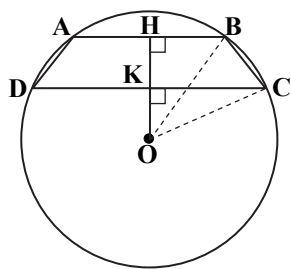
$$\triangle OKC : KC = \sqrt{OC^2 - OK^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \Rightarrow DC = 2KC = 2 \times 4 = 8$$

$AB \parallel CD$ پس $\widehat{AD} = \widehat{BC}$ و $AD = BC$ ، در نتیجه دوزنقه $ABCD$ متساوی‌الساقین است.

حال شکل زیر را در نظر گرفته و داریم:

$$BE = 1, EC = FD = \frac{DC - AB}{2} = \frac{8 - 6}{2} = 1$$

مثلث BEC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، پس: $\hat{C} = 45^\circ$



۲۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۲ (درس ۲، فصل ۲)

بازتاب نقطه E را نسبت به قطر BD یافته و E' می‌نامیم. با توجه به اینکه در مربع، قطر، نیمساز است و با توجه به شکل روبه‌رو، E' بر روی ضلع DC قرار دارد. E' را به A وصل می‌کنیم تا قطر BD را در M قطع کنند، M را به E وصل می‌کنیم. $AM + ME$ کمترین مقدار ممکن است.

$$AM + ME = AM + ME' = AE'$$

$$\triangle ADE' : AE'^2 = AD^2 + DE'^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

$$\Rightarrow AE' = 10 \Rightarrow AM + ME = 10 \quad (1)$$

طبق تالس در مثلث OAD داریم:

$$\triangle OAD : EH \parallel AO \Rightarrow \frac{EH}{AO} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{EH}{AO} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AO}{EH} = \frac{4}{3} \quad (2)$$

دو مثلث AOM و EMH متشابه‌اند: زیرا طبق خواص بازتاب داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ \hat{H} = \hat{O} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle EMH \sim \triangle AOM \Rightarrow \frac{AM}{EM} = \frac{AO}{EH} \xrightarrow{(2)} \frac{AM}{EM} = \frac{4}{3} \Rightarrow AM = \frac{4}{3} EM \xrightarrow{(1)} \frac{4}{3} EM + EM = 10$$

$$\Rightarrow \frac{7}{3} EM = 10 \Rightarrow EM = \frac{30}{7} \Rightarrow AM = \frac{4}{3} \times \frac{30}{7} \Rightarrow AM = \frac{40}{7} \Rightarrow |AM - EM| = \left| \frac{40}{7} - \frac{30}{7} \right| = \frac{10}{7}$$

۲۴- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۲ (درس ۳، فصل ۱ و درس ۲، فصل ۳)

در شکل روبه‌رو، می‌دانیم $AE = AF$ (برابر با نصف محیط مثلث ABC است).

$$ABC \text{ نصف محیط مثلث } = AE = AF = P = \frac{4 + 6 + 5}{2} = \frac{15}{2}$$

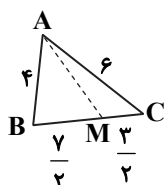
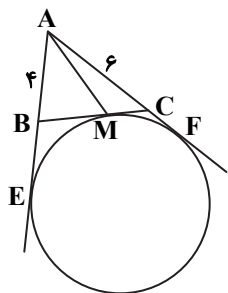
$$BM = BE = AE - AB = P - AB = \frac{15}{2} - 4 = \frac{7}{2}$$

$$CM = CF = AF - AC = P - AC = \frac{15}{2} - 6 = \frac{3}{2}$$

حال با کمک رابطه استوارت، طول AM را به دست می‌آوریم:

$$AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot BM = BC(AM^2 + BM \cdot MC) \Rightarrow 4^2 \times \frac{3}{2} + 6^2 \times \frac{7}{2} = 5(AM^2 + \frac{7}{2} \times \frac{3}{2})$$

$$\Rightarrow 24 + 126 = 5(AM^2 + \frac{21}{4}) \Rightarrow 30 = AM^2 + \frac{21}{4} \Rightarrow \frac{99}{4} = AM^2 \Rightarrow AM = \sqrt{\frac{99}{4}} = \frac{3\sqrt{11}}{2}$$



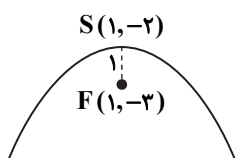
▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (درس ۳، فصل ۲)

۲۵- پاسخ: گزینه ۱

معادله سهمی را به صورت متعارف می نویسیم:

$$x^2 + 4y - 2x + 9 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + 4y + 9 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = -4y - 8 \Rightarrow (x-1)^2 = -4(y+2) \Rightarrow S(1, -2), a = 1$$

سهمی قائم روبه پایین است و مختصات کانون، مطابق شکل به صورت زیر است:



$$F(1, -2-1) \Rightarrow F(1, -3)$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (درس ۱، فصل ۱)

۲۶- پاسخ: گزینه ۲

ابتدا ماتریس های A، B و C را با درایه هایشان مشخص می کنیم:

$$A = [i+j]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = [i^2]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$C = [ij-1]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

چون سؤال درایه سطر اول و ستون دوم ماتریس نهایی را می خواهد، سطر اول A را در کل ماتریس B و حاصل را در ستون دوم ماتریس C ضرب می کنیم:

$$ABC = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 50 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 450$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۱)

۲۷- پاسخ: گزینه ۴

این دترمینان را بر حسب ستون دوم بسط می دهیم:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & m-x \\ 3 & x+1 & 0 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x+1) \begin{vmatrix} x & m-x \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - 2(m-x)) = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 + 2x - 2m) = 0$$

چون $x = -1$ یک ریشه معادله است، پس پیرانتز دوم یا باید ریشه مضاعف $x = -1$ را داشته باشد و یا ریشه نداشته باشد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4 + 4m = 0 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow x^2 + 2x - 2m = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1, \text{ یا } \Delta < 0 \Rightarrow 4 + 4m < 0 \Rightarrow m < -1 \Rightarrow \text{جواب نهایی: } m \leq -1$$

از بین گزینه ها، فقط $m = -1$ در این بازه قرار دارد.

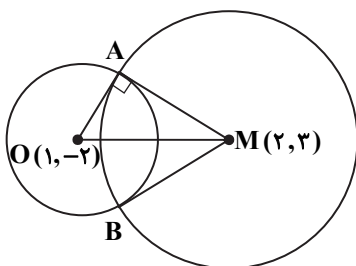
▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۲)

۲۸- پاسخ: گزینه ۳

معادله دایره داده شده را به صورت استاندارد می نویسیم:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 - 4 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \Rightarrow O(1, -2), R = 3$$

با توجه به شکل، ابتدا OM و سپس به کمک فیثاغورس، اندازه AM را می یابیم.



$$M(2, 3) \Rightarrow OM = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{OM^2 - OA^2} = \sqrt{26 - 3^2} = \sqrt{17}$$

معادله دایره ای به مرکز M و شعاع MA را می نویسیم:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 17$$

برای یافتن نقاط A و B، باید دستگاه شامل معادلات دو دایره را حل کنیم:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y - 4 = 0 \end{cases}$$

معادله دو دایره را از هم کم می کنیم تا جملات x^2 و y^2 حذف شوند:

$$(x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4) - (x^2 + y^2 - 4x - 6y - 4) = 0 \Rightarrow 2x + 10y = 0 \Rightarrow 5y + x = 0$$

مختصات نقاط A و B، در معادلات دو دایره صدق می کنند، پس در معادله تفاضل آنها که خط $5y + x = 0$ است نیز صدق می کنند، پس خط

$5y + x = 0$ همان خط گذرنده از A و B است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۳)

۲۹- پاسخ: گزینه ۳

$$|\vec{b} \times (\vec{a} + \vec{b})| = |\vec{b} \times \vec{a} + \underbrace{\vec{b} \times \vec{b}}_{\vec{0}}| = |\vec{b} \times \vec{a}| = |\vec{a}| \times |\vec{b}| \sin \theta = 5\sqrt{15} \Rightarrow 5 \times 4 \sin \theta = 5\sqrt{15} \Rightarrow \sin \theta = \frac{5\sqrt{15}}{20} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta + \frac{15}{16} = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{16} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{1}{4}$$

از آنجا که زاویه بین دو بردار حاده است $\cos \theta = \frac{1}{4}$ قابل قبول است.

حال طول بردار $2\vec{a} - \vec{b}$ را به دست می آوریم، برای این کار نیاز به $\vec{a} \cdot \vec{b}$ داریم که برابر است با:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 4 \times 5 \times \frac{1}{4} = 5$$

$$|2\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4 \times 16 - 4 \times 5 + 25 = 96$$

$$\Rightarrow |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضی ۱ (درس ۱، فصل ۷)

۳۰- پاسخ: گزینه ۳

در صورت سؤال ذکر شده با کنار هم قرار دادن ارقام، پس معنی جایگشت دارد و تکرار ارقام مجاز نیست. همچنین عددی مضرب ۶ است که هم مضرب ۲ و هم مضرب ۳ باشد، چون مجموع ارقام داده شده همواره مضرب ۳ است، پس کافی است تعداد اعداد زوج را با ارقام داده شده محاسبه کنیم.

$$n(S) = \frac{4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{\text{صفر نباشد}} = 96$$

برای محاسبه $n(A)$ ، بر حسب این که رقم یکان صفر یا زوج غیر صفر باشد، دو حالت داریم:

$$\text{رقم صفر نباشد: } \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1}{\text{رقم صفر}} = 24$$

$$\text{رقم ۲ یا ۶ باشد: } \frac{3 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2}{\text{صفر نباشد}} = 36$$

$$n(A) = 24 + 36 = 60 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{60}{96} = \frac{5}{8}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (درس ۳، فصل ۱)

۳۱- پاسخ: گزینه ۲

ابتدا هر کدام از عبارت های $A - (A \cap B)'$ و $B \cap (A \cap B)'$ را ساده می کنیم.

$$\begin{cases} A - (A \cap B)' = A \cap (A \cap B)' = A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) = A \cap B \\ B \cap (A \cap B)' = B \cap (A' \cup B') = (B \cap A') \cup (B \cap B') = B \cap A' \end{cases}$$

حال خواسته سؤال را به دست می آوریم:

$$(A \cap B) \cup (B \cap A') = B \cap (A \cup A') = B \xrightarrow{\text{متکم}} B'$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (درس ۱، فصل ۱)

۳۲- پاسخ: گزینه ۴

ابتدا هر کدام از گزاره های $p \Rightarrow [(\sim(q \Rightarrow p) \vee q)]$ و $p \wedge [(p \Rightarrow q) \wedge \sim q]$ را ساده می کنیم.

$$I) p \Rightarrow [(\sim(q \Rightarrow p) \vee q)] \equiv p \Rightarrow [(\sim(\sim q \vee p) \vee q)] \equiv p \Rightarrow [(q \wedge \sim p) \vee q] \equiv p \Rightarrow q$$

$$II) p \wedge [(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \equiv p \wedge [(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \equiv p \wedge [(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q)] \equiv p \wedge (\sim p \wedge \sim q)$$

$$\equiv (\underbrace{p \wedge \sim p}_F) \wedge \sim q \equiv F \wedge \sim q \equiv F$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$I, II: (p \Rightarrow q) \vee F \equiv p \Rightarrow q$$

۳۳- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * آمار و احتمال (درس ۳، فصل ۲)

احتمال انتخاب هر کدام از طرف‌ها برابر $\frac{1}{4}$ است. احتمال پیشامد مورد نظر را در هر کدام از طرف‌ها محاسبه می‌کنیم.

سیاه ۱ تا ۴ سفید ۱ تا ۶	⇒ دو مهره ناهم‌رنگ با مجموع ۶	سیاه ۱ سفید ۵	سیاه ۲ سفید ۴	سیاه ۳ سفید ۳	سیاه ۴ سفید ۲
----------------------------	-------------------------------	------------------	------------------	------------------	------------------

$$\Rightarrow \text{مقدار احتمال} = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{4}{\frac{10 \times 9}{2}} = \frac{4}{45}$$

سیاه ۱ تا ۵ سفید ۱ تا ۵	⇒ دو مهره ناهم‌رنگ با مجموع ۶	سیاه ۱ سفید ۵	سیاه ۲ سفید ۴	سیاه ۳ سفید ۳	سیاه ۴ سفید ۲	سیاه ۵ سفید ۱
----------------------------	-------------------------------	------------------	------------------	------------------	------------------	------------------

$$\Rightarrow \text{مقدار احتمال} = \frac{\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{5}{45}$$

$$P(\text{دو مهره ناهم‌رنگ با مجموع ۶}) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{45} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{45} = \frac{9}{90} = 0.1$$

طبق قانون احتمال کل داریم:

▲ مشخصات سؤال: متوسط * آمار و احتمال (درس ۳، فصل ۳)

۳۴- پاسخ: گزینه ۱

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و سپس چارک‌ها را مشخص می‌کنیم.

نیمه اول داده‌ها	نیمه دوم داده‌ها
۳۲, ۳۷, ۳۹, ۴۲, ۴۶, ۵۰, ۵۴	۵۶, ۵۷, ۵۹
↓ $Q_1 = 39$	↓ $Q_3 = 56$

داده‌های داخل جعبه در نمودار جعبه‌ای به صورت زیر هستند:

$$42, 46, 50, 54 \Rightarrow \bar{x} = \frac{42 + 46 + 50 + 54}{4} = \frac{192}{4} = 48$$

$$\sigma^2 = \frac{(42-48)^2 + (46-48)^2 + (50-48)^2 + (54-48)^2}{4} = \frac{36 + 4 + 4 + 36}{4}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{80}{4} = 20 \Rightarrow \sigma = 2\sqrt{5} \Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2\sqrt{5}}{48} = \frac{\sqrt{5}}{24}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۱)

۳۵- پاسخ: گزینه ۱

طبق رابطه تقسیم و فرض سؤال داریم:

با در نظر گرفتن تمام حالات ممکن برای تجزیه عدد ۱۰۰ و شرط رابطه تقسیم یعنی $0 \leq r < b$ داریم:

$$0 \leq r < b \Rightarrow r < fb + 1$$

$$r(fb + 1) = 1 \times 100 = 2 \times 50 = 4 \times 25 = 5 \times 20$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ fb + 1 = 100 \Rightarrow b = \frac{99}{f} \notin \mathbb{N} \end{cases} \text{ غیرممکن}$$

$$\begin{cases} r = 2 \\ fb + 1 = 50 \Rightarrow b = \frac{49}{f} \notin \mathbb{N} \end{cases} \text{ غیرممکن}$$

$$\begin{cases} r = 4 \\ fb + 1 = 25 \Rightarrow b = 6 \end{cases} \text{ قابل قبول}$$

$$\begin{cases} r = 5 \\ fb + 1 = 20 \Rightarrow b = \frac{19}{f} \notin \mathbb{N} \end{cases} \text{ غیرممکن}$$

بنابراین فقط یک مقدار ($b = 6$) برای b قابل قبول است.

۳۶- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (درس ۳، فصل ۱)

نکته: شرط جواب معادله سیاله $ax + by = c$ در $\mathbb{Z}$ آن است که $(a, b) | c$

طبق نکته فوق، معادله سیاله $(5m-2)x + (7m+3)y = 13$ در $\mathbb{Z}$ جواب دارد هرگاه $13 | (5m-2, 7m+3)$ ، فرض می‌کنیم ب.م.م $5m-2$ و $7m+3$ برابر d باشد، داریم:

$$(5m-2, 7m+3) = d$$

$$\begin{cases} d | 5m-2 \xrightarrow{\times 7} d | 35m-14 \\ d | 7m+3 \xrightarrow{\times 5} d | 35m+15 \end{cases} \xrightarrow{-} d | 29 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 29$$

چون $29/13$ پس لزوماً $d = 1$ است.

به همین منظور مقادیر دورقمی m که باعث می‌شوند ب.م.م دو عبارت $5m-2$ و $7m+3$ برابر عدد یک نشود را حساب کرده و از کل اعداد دورقمی کم می‌کنیم.

$$29 | 5m-2 \Rightarrow 5m-2 \equiv 0 \Rightarrow 5m \equiv 2 \Rightarrow 5m \equiv 2+2 \times 29 \xrightarrow{+5} m \equiv 12 \Rightarrow m = 29k + 12$$

به‌ازای $k = 0, 1, 2, 3$ ، m عددی دورقمی می‌شود، پس تعداد جواب‌های قابل قبول برای m برابر است با: $90 - 4 = 86$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (درس ۱، فصل ۲)

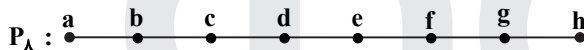
۳۷- پاسخ: گزینه ۱

در گراف P_n ، دو رأس از درجه ۱ و $n-2$ رأس از درجه ۲ هستند:

$$\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n-2} \times 1 \times 1 = 2^{n-2} = 64 = 2^6 \Rightarrow n-2 = 6 \Rightarrow n = 8$$

بنابراین حاصل ضرب درجات رئوس برابر است با:

می‌دانیم در گراف P_n ، بین هر دو رأس فقط یک مسیر وجود دارد، بنابراین در گراف P_8 داریم:



$$1 = \text{تعداد مسیرهای به طول حداقل ۱} = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

$$q = 8 - 1 = 7 = \text{تعداد مسیرهای به طول ۱}$$

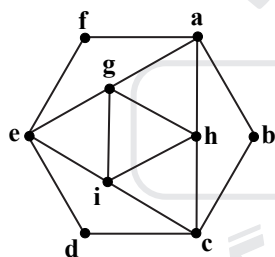
$$15 = 28 - 7 - 6 = \text{تعداد مسیرهای به طول حداقل ۳} = \text{تعداد مسیرهای به طول ۲} = 6 \quad (abc, bcd, cde, def, efg, fgh)$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۲)

۳۸- پاسخ: گزینه ۲

مجموعه احاطه‌گر مینیمال با کمترین عضو، همان مجموعه احاطه‌گر مینیمم است. مانند مجموعه $\{a, e, c\}$ و مجموعه احاطه‌گر مینیمال با بیشترین عضو، یک مجموعه احاطه‌گر با ۴ عضو مانند مجموعه $\{f, b, d, i\}$ است.

بنابراین خواسته سؤال برابر است با: $4 - 3 = 1$



▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۳)

۳۹- پاسخ: گزینه ۱

تعداد کل حالات، برابر با جایگشت ۶ حرف کلمه pencil است.

$$|S| = 6! = 720$$

مجموعه A را مجموعه کلماتی در نظر می‌گیریم که در آن‌ها عبارت «pen» وجود دارد.

$$|pen \text{ cil}| : |A| = 4! = 24$$

مجموعه B را مجموعه کلماتی در نظر می‌گیریم که در آن‌ها عبارت «cil» وجود دارد.

$$|pen \text{ cil}| : |B| = 4! = 24$$

$A \cap B$ مجموعه کلماتی است که در آن‌ها هم عبارت «pen» و هم عبارت «cil» وجود دارد.

$$|pen \text{ cil}| : |A \cap B| = 2! = 2$$

خواسته سؤال $|\overline{A \cap B}|$ است که برابر است با:

$$|\overline{A \cap B}| = |\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B| = 720 - 24 - 24 + 2 = 674$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۳)

۴۰- پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم اگر دو عدد زوج در هم ضرب شوند، حاصل همیشه مضرب ۴ است. بنابراین مطمئن‌ترین حالت زمانی است که تمام اعداد فرد از کیسه خارج شوند، یعنی ۱۰ کارت فرد، بعد از آن هر کارتی که خارج شود زوج است و با خارج کردن کارت‌های یازدهم و دوازدهم لزوماً دو عدد زوج خارج می‌شوند و حاصل ضرب آن‌ها مضرب ۴ خواهد شد، پس با خارج کردن حداقل ۱۲ کارت به هدف موردنظر می‌رسیم.

فیزیک

۴۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۱)

بین عددهای داده شده، اعداد $\frac{۳۳}{۲}$ و $\frac{۳۷}{۷}$ میلی متر به علت دور بودن از دیگر اعداد کنار گذاشته شده و میانگین اعداد دیگر را به دست می آوریم:

$$\frac{۳۵/۳ + ۳۴/۹ + ۳۵/۱}{۳} = \frac{۱۰۵/۳}{۳} = ۳۵/۱ \text{ mm}$$

۴۲- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۴)

موارد «ب» و «ث» صحیح هستند.

علت نادرستی گزینه های دیگر:

مورد «الف»: با افزایش دما، گرمای نهان تبخیر آب کاهش می یابد.

مورد «پ»: ترموکوپل در مقایسه با دماسنج های معیار، دقت بالایی ندارد.

مورد «ت»: از دمای صفر تا ۴ درجه با افزایش دما، حجم آب کاهش و چگالی آن زیاد می شود.

۴۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۲ (فصل ۱)

در رسانای باردار، چگالی سطحی بار در نقاط برجسته و نوک تیز بیشتر از دیگر نقاط است و میدان الکتریکی داخل رسانای باردار صفر ولی

روی سطح آن عمود بر رسانا است و چون بار رسانا مثبت است، جهت میدان رو به بیرون است.

۴۴- پاسخ: گزینه ۳

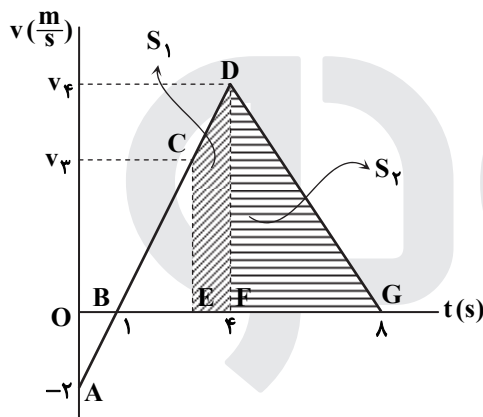
▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

در ابتدا سرعت متحرک در لحظه های $t = ۳ \text{ s}$ و $t = ۴ \text{ s}$ را با استفاده از

تشابه به دست می آوریم:

$$\triangle OAB \sim \triangle BCE : \frac{OA}{OB} = \frac{CE}{BE} \Rightarrow \frac{۲}{۱} = \frac{v_۳}{۳-۱} \Rightarrow v_۳ = ۴ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\triangle OAB \sim \triangle BDF : \frac{OA}{OB} = \frac{DF}{BF} \Rightarrow \frac{۲}{۱} = \frac{v_۴}{۴-۱} \Rightarrow v_۴ = ۶ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



مسافت طی شده توسط متحرک در بازه زمانی $t = ۳ \text{ s}$ تا $t = ۸ \text{ s}$ برابر

سطح زیر نمودار $v-t$ در این بازه زمانی است، بنابراین:

$$L = S_1 + S_2 = \frac{(CE + DF) \times EF}{۲} + \frac{FG \times DF}{۲} = \frac{(۴ + ۶) \times ۱}{۲} + \frac{(۸ - ۴) \times ۶}{۲} = ۵ + ۱۲ = ۱۷ \text{ m}$$

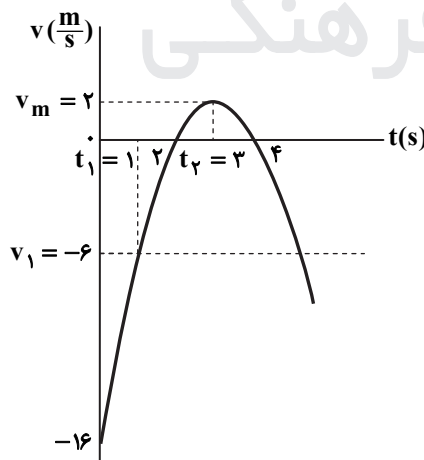
$$s_{av}(۳ \text{ s}, ۸ \text{ s}) = \frac{۱۷}{\Delta t} = \frac{۱۷}{۸-۳} = \frac{۱۷}{۵} = ۳ \frac{۱۷}{۵} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

و در پایان، محاسبه خواسته تست:

۴۵- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

در ابتدا نمودار سرعت-زمان را رسم می کنیم:



$$v = -۲t^۲ + ۱۲t - ۱۶$$

$$t = ۰ \Rightarrow v = -۱۶ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = ۰ \Rightarrow -۲(t^۲ - ۶t + ۸) = ۰ \Rightarrow -۲(t-۲)(t-۴) = ۰$$

$$\Rightarrow t = ۲ \text{ s}, t = ۴ \text{ s}$$

$$t_m = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۱۲}{۲(-۲)} = ۳ \text{ s}$$

$$\Rightarrow v_m = -۲(۳)^۲ + ۱۲(۳) - ۱۶ = ۲ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

سپس لحظه $t_۱$ را که در آن سرعت متحرک برابر $-۶ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ است، به دست می آوریم:

$$v_۱ = -۶ \Rightarrow -۲t^۲ + ۱۲t - ۱۶ = -۶ \Rightarrow ۲t^۲ - ۱۲t + ۱۰ = ۰ \Rightarrow t^۲ - ۶t + ۵ = ۰ \Rightarrow t_۱ = ۱ \text{ s}, t_۱ = ۵ \text{ s}$$

از طرفی شیب نمودار سرعت-زمان در یک لحظه مشخص، برابر شتاب متحرک در آن لحظه است؛ بنابراین با توجه به نمودار بالا، شتاب متحرک در

لحظه $t_۲ = ۳ \text{ s}$ برابر صفر است و در پایان محاسبه خواسته تست که اندازه شتاب متوسط متحرک در بازه $t_۱$ تا $t_۲$ است را به دست می آوریم:

$$a_{av} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۲ - (-۶)}{۳ - ۱} = \frac{۸}{۲} = ۴ \frac{\text{m}}{\text{s}^۲}$$

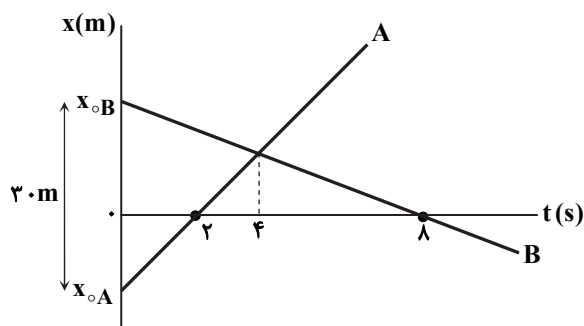
۴۶- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

با استفاده از نمودار مکان- زمان داده شده، معادله مکان- زمان متحرک های A و B را می نویسیم:

$$x_A = -\frac{x_{0A}}{2}t + x_{0A}$$

$$x_B = -\frac{x_{0B}}{8}t + x_{0B}$$



چون دو متحرک در لحظه $t = 4s$ از کنار یکدیگر عبور می کنند، بنابراین:

$$x_A = x_B \Rightarrow -\frac{x_{0A}}{2} \times 4 + x_{0A} = -\frac{x_{0B}}{8} \times 4 + x_{0B}$$

$$\Rightarrow -x_{0A} = \frac{x_{0B}}{2} \Rightarrow x_{0B} = -2x_{0A} \quad (1) \text{ رابطه}$$

از طرفی با توجه به نمودار، داریم:

$$x_{0B} - x_{0A} = 3 \xrightarrow{\text{رابطه (1)}} -2x_{0A} - x_{0A} = 3$$

$$\Rightarrow -3x_{0A} = 3 \Rightarrow x_{0A} = -1 \text{ m}$$

و در پایان، محاسبه خواسته تست:

$$v_A = -\frac{x_{0A}}{2} = -\frac{(-1)}{2} = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۱)

۴۷- پاسخ: گزینه ۲

در ابتدا سرعت گلوله را در لحظه $t = 2s$ و سپس سرعت گلوله را در لحظه برخورد به زمین محاسبه می کنیم:

$$v_1 = gt + v_0 \Rightarrow v_1 = 10 \times 2 + 0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_1^2 - v_0^2 = 2gh \Rightarrow v_1^2 - 0 = 2 \times 10 \times 125$$

$$\Rightarrow v_1^2 = 2500 \Rightarrow v_1 = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

حالا سرعت متوسط گلوله را در بازه زمانی $t = 2s$ تا لحظه برخورد گلوله به زمین محاسبه می کنیم. چون حرکت، شتابدار ثابت است، داریم:

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{20 + 50}{2} = 35 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۴۸- پاسخ: گزینه ۴

در ابتدا نیروهای وارد بر جسم را مشخص می کنیم و سپس قانون دوم نیوتون را در دو راستای افقی و عمودی می نویسیم:

$$F_{net,y} = 0 \Rightarrow 3F - F_N - mg = 0$$

$$\Rightarrow F_N = 3F - mg \quad (1) \text{ رابطه}$$

$$F_{net,x} = ma \Rightarrow F - f_k = ma \Rightarrow F - \mu_k F_N = ma$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه (1)}} F - \mu_k (3F - mg) = ma$$

$$\Rightarrow F - 0.4(3F - 2 \times 10) = 2 \times 2 \Rightarrow F - 1/2F + 8 = 4$$

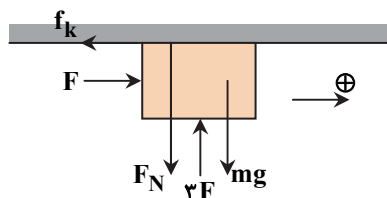
$$\Rightarrow 0.2F = 4 \Rightarrow F = 20 \text{ N}$$

$$\text{رابطه (1): } F_N = 3F - mg = 3 \times 20 - 2 \times 10 = 40 \text{ N}$$

نیروی که از طرف سطح بر جسم وارد می شود برابرند دو نیروی عمودی سطح و اصطکاک است، بنابراین:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_k^2} = \sqrt{F_N^2 + (\mu_k F_N)^2} = \sqrt{1 + \mu_k^2} F_N$$

$$= \sqrt{1 + (0.4)^2} \times 40 = \sqrt{1 + \frac{4}{25}} \times 40 = 1.8 \sqrt{29} \text{ N}$$

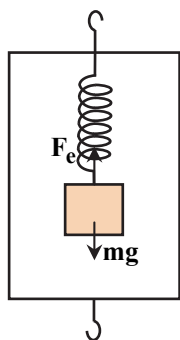


▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۴۹- پاسخ: گزینه ۴

بر جسم دو نیروی وزن و کشش فنر وارد می‌شود. با نوشتن قانون دوم نیوتون برای جسم در دو حالت زیر، داریم:

حالت اول: آسانسور با سرعت ثابت به سمت بالا حرکت می‌کند.



$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow F_e - mg = 0$$

$$\Rightarrow k(x_1 - x_0) = mg \Rightarrow k(20 - x_0) = 1 \times 10$$

$$\Rightarrow k(20 - x_0) = 10 \quad (1) \quad \text{رابطه (۱)}$$

حالت دوم: آسانسور با شتاب ثابت $\frac{2}{3} \frac{m}{s}$ به سمت بالا حرکت می‌کند.

$$F_e' - mg = ma \Rightarrow k(x_2 - x_0) = m(g + a) \Rightarrow k(21 - x_0) = 1 \times (10 + 2) \Rightarrow k(21 - x_0) = 12 \quad (2) \quad \text{رابطه (۲)}$$

از تقسیم رابطه (۱) بر (۲) داریم:

$$\frac{k(20 - x_0)}{k(21 - x_0)} = \frac{10}{12} \Rightarrow \frac{20 - x_0}{21 - x_0} = \frac{5}{6} \Rightarrow 120 - 6x_0 = 105 - 5x_0 \Rightarrow x_0 = 15 \text{ cm}$$

$$(1) \quad \text{رابطه (۱)}: k(20 - x_0) = 10 \Rightarrow k(20 - 15) = 10 \Rightarrow k = \frac{10}{5} = 2 \frac{\text{N}}{\text{cm}} = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۲)

۵۰- پاسخ: گزینه ۱

وزن شخص، درون ماهواره به مقدار 270 N از وزنش بر روی زمین کمتر است، بنابراین:

$$W' = W - 270 \Rightarrow mg' = mg - 270 \Rightarrow 75g' = 75 \times 10 - 270 \Rightarrow g' = 10 - \frac{270}{75} = 10 - 3.6 = 6.4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

در نتیجه شتاب گرانشی زمین در محل ماهواره $6.4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ است، پس:

$$g = \frac{GM_e}{r^2} \Rightarrow \frac{g'}{g} = \left(\frac{R_e}{R_e + h} \right)^2 \Rightarrow \frac{6.4}{10} = \left(\frac{6400}{6400 + h} \right)^2$$

$$\Rightarrow 0.64 = \left(\frac{6400}{6400 + h} \right)^2 \Rightarrow \frac{6400}{6400 + h} = 0.8$$

$$\Rightarrow 6400 + h = 8000 \Rightarrow h = 1600 \text{ km}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

۵۱- پاسخ: گزینه ۳

در ابتدا دامنه و بسامد زاویه‌ای نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$2A = 16 \text{ cm} \Rightarrow A = 8 \text{ cm} = 0.08 \text{ m}$$

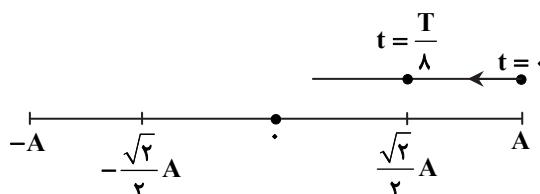
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3}{2} = 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

سپس مکان نوسانگر را در نقطه‌ای که شتاب نوسانگر $36\sqrt{2} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ است، مشخص می‌کنیم و مقدار آن را بر حسب دامنه نوسان، محاسبه می‌کنیم:

$$|a| = \omega^2 x \Rightarrow 0.36\sqrt{2} = (3)^2 x \Rightarrow x = 0.04\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\frac{x}{A} = \frac{0.04\sqrt{2}}{0.08} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} A$$

با توجه به نمودار زیر، مدت زمان لازم برای آن که شتاب نوسانگر برای اولین بار $36\sqrt{2} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ شود، برابر است با:



$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{2}{4} = 0.5 \text{ s} = 500 \text{ ms}$$

۵۲- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

طول آونگ A، ۲/۲۵ برابر طول آونگ B است، بنابراین:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{L_A}{L_B}} = \sqrt{2/25} = 1/5 \Rightarrow T_A = 1/5 T_B \quad (1) \text{ رابطه}$$

در هر دقیقه آونگ A، ۵ نوسان کمتر از آونگ B انجام می‌دهد، در نتیجه:

$$n_A = n_B - 5 \Rightarrow n_B - n_A = 5 \xrightarrow{(n = \frac{\Delta t}{T})} \frac{\Delta t}{T_B} - \frac{\Delta t}{T_A} = 5 \Rightarrow \frac{60}{T_B} - \frac{60}{T_A} = 5 \xrightarrow{\text{رابطه (1)}} \frac{60}{T_B} - \frac{60}{1/5 T_B} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{60}{T_B} - \frac{300}{T_B} = 5 \Rightarrow \frac{-240}{T_B} = 5 \Rightarrow T_B = 4s$$

رابطه (۱): $T_A = 1/5 T_B = 1/5 \times 4 = 0.8s$

۵۳- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۳)

اگر از اندیس‌های ۱ و ۲ به ترتیب برای کمیت‌های قبل و بعد از تغییرات استفاده کنیم، داریم:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{P_2}{P_1} \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \xrightarrow{(P \propto A^2 f^2)} \frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \times \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

$$= (2\sqrt{2})^2 \times (2)^2 \times \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 32 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \quad (1) \text{ رابطه}$$

از طرفی:

$$r_2 = r_1 - \frac{60}{100} r_1 = \frac{40}{100} r_1 = 0.4 r_1$$

$$(1) \text{ رابطه: } \frac{I_2}{I_1} = 32 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 32 \times \left(\frac{1}{0.4}\right)^2 = \frac{32}{0.16} = 200$$

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_1} = 10 \log 200 = 10 \log (2 \times 100) = 10 (\log 2 + \log 100) \Rightarrow \beta_2 - \beta_1 = 10 (0.3 + 2 \log 10)$$

$$= 10 (0.3 + 2) = 10 \times 2.3 = 23 \text{ dB}$$

۵۴- پاسخ: گزینه ۴

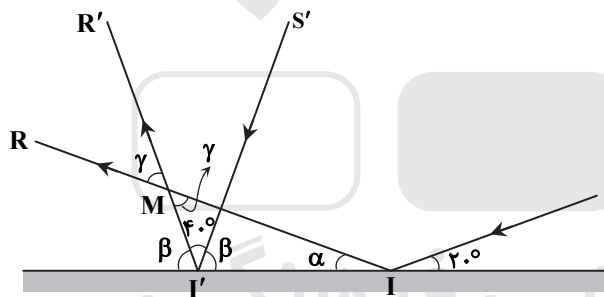
▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

در ابتدا با استفاده از قانون بازتاب از آینه‌های تخت، زوایای

α و β در شکل زیر را مشخص می‌کنیم:

$$\alpha = 20^\circ$$

$$\beta + 40^\circ + \beta = 180^\circ \Rightarrow 2\beta = 140^\circ \Rightarrow \beta = 70^\circ$$



سپس با استفاده از قضیه زوایای مثلث، زاویه بین پرتوهای بازتاب (γ) را به دست می‌آوریم:

$$\triangle I'M: \alpha + (\beta + 40^\circ) + \gamma = 180^\circ \Rightarrow 20^\circ + 70^\circ + 40^\circ + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 50^\circ$$

۵۵- پاسخ: گزینه ۲

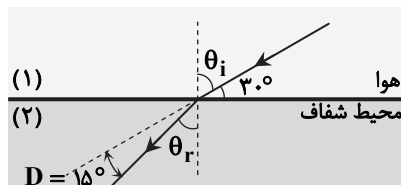
▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

در ابتدا زوایای تابش و شکست را مشخص می‌کنیم و سپس با نوشتن قانون شکست

اسنل، سرعت نور در محیط شفاف را به دست می‌آوریم:

$$\theta_i = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$D = \theta_i - \theta_r \Rightarrow 15^\circ = 60^\circ - \theta_r \Rightarrow \theta_r = 45^\circ$$



$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{3 \times 10^8}{v_2} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3 \times 10^8}{v_2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times 10^8}{v_2} \Rightarrow v_2 = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times 10^8 = \sqrt{6} \times 10^8 \text{ m/s}$$

بسامد نور وابسته به منبع تولید نور بوده و در تمام محیط‌ها یکسان است، بنابراین بسامد نور در محیط شفاف نیز برابر $25 \cdot \sqrt{6} \text{ THz}$ است، پس:

$$f_2 = 25 \cdot \sqrt{6} \text{ THz} = 25 \cdot \sqrt{6} \times 10^{12} \text{ Hz}$$

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{f_2} = \frac{\sqrt{6} \times 10^8}{25 \cdot \sqrt{6} \times 10^{12}} = 4 \times 10^{-7} \text{ m} = 400 \times 10^{-9} \text{ m} = 400 \text{ nm}$$

۵۶- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۳ (فصل ۴)

بسامد نور آبی بیشتر از بسامد نور قرمز است و بنابراین مطابق با رابطه $E = hf$ ، انرژی نور آبی بیشتر از انرژی نور قرمز است و در نتیجه ضریب شکست برای نور آبی بیشتر از ضریب شکست شیشه برای نور قرمز است، بنابراین:

$$n_{\text{قرمز}} > n_{\text{آبی}} \xrightarrow{(n=\frac{c}{v})} \frac{c}{v_{\text{آبی}}} > \frac{c}{v_{\text{قرمز}}} \Rightarrow \frac{1}{v_{\text{آبی}}} > \frac{1}{v_{\text{قرمز}}} \Rightarrow v_{\text{آبی}} < v_{\text{قرمز}}$$

۵۷- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۴)

تعداد گره‌های تشکیل شده در طناب ۸ عدد است؛ بنابراین تعداد شکم‌های تشکیل شده در آن $n = 8 - 1 = 7$ عدد و موج ایستاده در حال نوسان هماهنگ هفتم است، پس:

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \Rightarrow 35 = \frac{7\lambda_v}{2} \Rightarrow \lambda_v = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$$

$$\lambda_v = \frac{v}{f_v} \Rightarrow 0.1 = \frac{28}{f_v} \Rightarrow f_v = 280 \text{ Hz}$$

$$f_v = 7f_1 \Rightarrow 280 = 7f_1 \Rightarrow f_1 = 40 \text{ Hz}$$

۵۸- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

توان تابشی لامپ ۴۸ W است؛ بنابراین انرژی فوتون‌های خارج شده از لامپ در مدت یک دقیقه برابر است با:

$$P_{\text{تابشی}} = \frac{E_{\text{تابشی}}}{t} \Rightarrow 48 = \frac{E_{\text{تابشی}}}{60} \Rightarrow E_{\text{تابشی}} = 48 \times 60 \text{ J} = \frac{48 \times 60}{1/6 \times 10^{-19}} \text{ eV} \Rightarrow E_{\text{تابشی}} = 1/8 \times 10^{22} \text{ eV}$$

اکنون می‌توان تعداد فوتون‌های به طول موج 500 nm را که این مقدار انرژی را حمل می‌کنند، به دست آورد:

$$E_{\text{تابشی}} = \frac{nhc}{\lambda} \Rightarrow 1/8 \times 10^{22} = \frac{n \times (4 \times 10^{-15})}{500 \times 10^{-9}} \Rightarrow n = \frac{9}{4} \times 10^{30} = 2/25 \times 10^{30}$$

۵۹- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۵)

با فرض اینکه بسامد پرتو تابیده شده به هر یک از دو فلز f باشد، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های خارج شده از فلزهای A و B برابر است با:

$$(A \text{ فلز}): K_{\max, A} = hf - W_{0A} \xrightarrow{(K_{\max, A} = 1/5 K_{\max, B})} \frac{1}{5} K_{\max, B} = hf - 1/8 W_{0B}$$

$$\Rightarrow hf = 1/5 K_{\max, B} + 1/8 W_{0B} \quad (1) \text{ رابطه}$$

$$(B \text{ فلز}): K_{\max, B} = hf - W_{0B} \Rightarrow hf = K_{\max, B} + W_{0B} \quad (2) \text{ رابطه}$$

از مقایسه رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$1/5 K_{\max, B} + 1/8 W_{0B} = K_{\max, B} + W_{0B} \Rightarrow 1/5 K_{\max, B} = 1/2 W_{0B} \Rightarrow K_{\max, B} = \frac{2}{5} W_{0B} \quad (3) \text{ رابطه}$$

با قراردادن رابطه (۳) در رابطه (۲) خواهیم داشت:

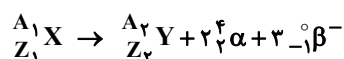
$$(2) \text{ رابطه}: hf = K_{\max, B} + W_{0B} \xrightarrow{(3) \text{ رابطه}} hf = \frac{2}{5} W_{0B} + W_{0B} = \frac{7}{5} W_{0B}$$

$$\xrightarrow{(W_{0A} = 1/8 W_{0B})} hf = \frac{7}{5} \times \frac{W_{0A}}{1/8} = \frac{7}{4} W_{0A} \Rightarrow \frac{hf}{W_{0A}} = \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{hf}{hf_{0A}} = \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{f}{f_{0A}} = \frac{7}{4}$$

۶۰- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۶)

در ابتدا واکنش هسته‌ای بیان شده در تست را به زبان ریاضی می‌نویسیم:



اکنون با نوشتن قانون بقای بار و قانون بقای جرم با توجه به واکنش بالا، خواهیم داشت:

$$A_1 = A_2 + 2 \times 4 + 0 \Rightarrow A_1 = A_2 + 8 \quad (1) \text{ رابطه}$$

$$Z_1 = Z_2 + 2 \times 2 + 3(-1) \Rightarrow Z_1 = Z_2 + 1 \quad (2) \text{ رابطه}$$

و در پایان، با استفاده از روابط (۱) و (۲)، خواسته تست را به دست می‌آوریم:

$$(1) \text{ رابطه}: A_1 = A_2 + 8 \xrightarrow{(A=Z+N)} Z_1 + N_1 = Z_2 + N_2 + 8$$

$$\xrightarrow{(2) \text{ رابطه}} Z_2 + 1 + N_1 = Z_2 + N_2 + 8 \Rightarrow N_1 - N_2 = 7$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۶)

۶۱- پاسخ: گزینه ۲

در ابتدا برای هر یک از ماده‌های پرتوزای A و B رابطه تعداد هسته‌های فعال را بر حسب نیمه عمر می‌نویسیم:

$$N_A = \frac{N_{0A}}{2^{n_A}} \xrightarrow{(N_{0A} = 4N_{0B})} N_A = \frac{4N_{0B}}{2^{n_A}}$$

$$N_B = \frac{N_{0B}}{2^{n_B}}$$

با فرض اینکه پس از گذشت t روز، تعداد هسته‌های فعال دو ماده پرتوزا با یکدیگر برابر می‌شوند، داریم:

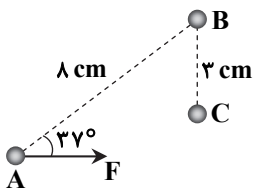
$$N_A = N_B \Rightarrow \frac{4N_{0B}}{2^{n_A}} = \frac{N_{0B}}{2^{n_B}} \Rightarrow \frac{2^{n_A}}{2^{n_B}} = 4 \Rightarrow 2^{(n_A - n_B)} = 2^2 \Rightarrow n_A - n_B = 2 \xrightarrow{(n = \frac{\Delta t}{T})} \frac{t}{T_A} - \frac{t}{T_B} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{t}{3} - \frac{t}{5} = 2 \Rightarrow \frac{2t}{15} = 2 \Rightarrow t = 15 \text{ d}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۶۲- پاسخ: گزینه ۴

چون بار الکتریکی منفی است، نیروی الکتریکی در خلاف جهت میدان الکتریکی است.



$$F_{\text{میدان}} = E|q| = 4 \times 10^5 \times 0.5 \times 10^{-3} = 200 \text{ N}$$

$$W_{\text{میدان}} = F \times d \cos 37^\circ$$

$$\Rightarrow W_F = 200 \times 8 \times 10^{-2} \times 0.8 = 128 \text{ J}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۲ (فصل ۱)

۶۳- پاسخ: گزینه ۱

$$\Delta U = \frac{1}{2} CV_2^2 - \frac{1}{2} CV_1^2 \Rightarrow 240 = \frac{1}{2} C((V_1 + 4)^2 - V_1^2) = \frac{1}{2} C(V_1^2 + 16 + 8V_1 - V_1^2) \Rightarrow 240 = 8C + 4CV_1$$

$$\xrightarrow{Q_1 = 50 \mu\text{C}} 240 = 8C + 200 \Rightarrow 8C = 40 \Rightarrow C = 5 \mu\text{F}$$

$$CV_1 = 50 \Rightarrow V_1 = 10 \text{ V}$$

$$E = \frac{V_1}{d} = \frac{10}{0.2 \times 10^{-3}} = 5 \times 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۶۴- پاسخ: گزینه ۲

$$\Delta R = R_1 \alpha \Delta \theta \Rightarrow \frac{\Delta R}{R_1} = \alpha \Delta \theta \Rightarrow \frac{\Delta R}{R_1} = 2 \times 10^{-3} \times 50 = 0.1 \Rightarrow \frac{\Delta R}{R_1} \times 100 = 10\%$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۶۵- پاسخ: گزینه ۱

با تابش نور بر روی LDR مقاومت آن کاهش می‌یابد؛ در نتیجه مقاومت معادل کل مدار کاهش می‌یابد. (چه LDR با دیگر اجزای مدار متوالی باشد چه موازی)، در نتیجه:

$$\uparrow I = \frac{\mathcal{E}}{\downarrow R_{eq} + r}$$

$$P_{\text{تولیدی}} \uparrow = \mathcal{E} I \uparrow$$

توان تولیدی باتری افزایش می‌یابد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۶۶- پاسخ: گزینه ۲

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1 + R_2} \Rightarrow I_1 = \frac{\mathcal{E}}{20}$$

افت پتانسیل اولیه:

$$\text{افت پتانسیل: } I_1 r = \left(\frac{\mathcal{E}}{20}\right)(2) = \frac{\mathcal{E}}{10}$$

افت پتانسیل ثانویه:

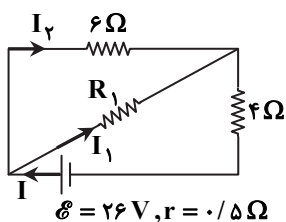
$$\text{افت پتانسیل: } I_2 r = \left(\frac{\mathcal{E}}{10}\right)\left(\frac{2}{10}\right) = \frac{2}{25} \mathcal{E}$$

$$\frac{2}{25} \mathcal{E} = I_2 r = \left(\frac{\mathcal{E}}{R' + 6 + 2}\right)(2) \Rightarrow R' = 17 \Omega$$

بنابراین مقاومت رئوستا از 17Ω به 12Ω می‌رسد. یعنی 5Ω افزایش می‌یابد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

۶۷- پاسخ: گزینه ۳



$$I = I_1 + I_2$$

$$I^2 \times 4 = 6 \times (I_2^2 \times 6) \Rightarrow I^2 = 9I_2^2 \Rightarrow I = 3I_2 \Rightarrow I_1 = 2I_2$$

$$6I_2 = R_1 I_1 = R_1 \times 2I_2 \Rightarrow R_1 = 3 \Omega$$

$$R_{eq} = \frac{6 \times 3}{6 + 3} + 4 = 6 \Omega$$

$$I = \frac{E}{R_{eq} + r} = \frac{26}{6 + 0.5} = 4 A \Rightarrow I_2 = \frac{4}{3} A, I_1 = \frac{8}{3} A$$

$$P_{R_1} = I_1^2 \times R_1 = \frac{64}{9} \times 3 = \frac{64}{3} W$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۳)

۶۸- پاسخ: گزینه ۴

$$R_{eq} = \frac{9 \times 18}{9 + 18} + 5 = 6 + 5 = 11 \Omega$$

$$I = \frac{E}{R_{eq} + r} \Rightarrow I = \frac{4}{11 + 1} = \frac{1}{3} A$$

جریان عبوری از سیم‌لوله را با I' نشان می‌دهیم:

$$I' \times 9 = 18 I'' \Rightarrow I' = 2 I''$$

$$I = I' + I'' = 3 I'' \xrightarrow{I = \frac{1}{3} A} I'' = \frac{1}{9} A, I' = \frac{2}{9} A$$

$$B = \mu_0 \frac{NI}{\ell} = \mu_0 n I \Rightarrow B = 12 \times 10^{-7} \times 600 \times \frac{2}{9} = 1/6 \times 10^{-4} T = 1/6 G$$

تعداد دور در یک متر تعداد دور در واحد طول

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

۶۹- پاسخ: گزینه ۴

$$\Delta \Phi = AB (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \Rightarrow \Delta \Phi = (10 \times 10^{-4}) (50 \times 10^{-4}) (2) \Rightarrow |\Delta \Phi| = 10^{-4} Wb$$

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \Rightarrow RI = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \Rightarrow R \left(\frac{\Delta q}{\Delta t} \right) = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta q = \frac{\Delta \Phi}{R} \Rightarrow \Delta q = \frac{10^{-4}}{2} = 50 \times 10^{-6} C = 50 \mu C$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۴)

۷۰- پاسخ: گزینه ۱

$$L = \frac{\mu_0 AN^2}{\ell} \Rightarrow \frac{L_A}{L_B} = \left(\frac{N_A}{N_B} \right)^2 = 100$$

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow \frac{U_A}{U_B} = \left(\frac{L_A}{L_B} \right) \left(\frac{I_A}{I_B} \right)^2 = (100) \left(\frac{1}{2} \right)^2 = 25$$

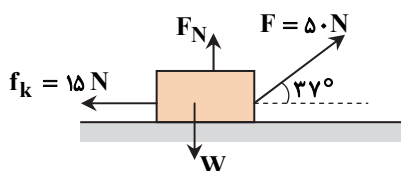
▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۲)

۷۱- پاسخ: گزینه ۴

طبق معادله پیوستگی، تندی مایع در نقطه B بیشتر از نقطه A است و طبق اصل برنولی فشار در نقطه B کمتر از نقطه A است و چون مایع تراکم‌ناپذیر است، آهنگ جریان شاره در همه نقاط آن یکسان است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۳)

۷۲- پاسخ: گزینه ۱



$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_F + W_{fk} = \Delta K$$

$$\Rightarrow F \times d \times \cos 37^\circ + f_k \times d \times \cos 180^\circ = \Delta K$$

$$\Rightarrow 50 \times 8 \times 0.8 - 15 \times 8 = \frac{1}{2} \times 4 \times (v_2^2 - v_1^2) \Rightarrow 320 - 120 = 2(v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Rightarrow 100 = 2v_2^2 \Rightarrow v_2^2 = \frac{50}{1} \Rightarrow v_2 = \frac{5\sqrt{2}}{1} \frac{m}{s}$$

▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۱ (فصل ۴)

۷۳- پاسخ: گزینه ۳

$$m_1 c_1 (\theta_e - \theta_1) + m_2 c_2 (\theta_e - \theta_2) = 0 \Rightarrow 1 \times 10 \times (\theta_e - 120) + 1/25 \times 210 (\theta_e - 50) = 0$$

$$\theta_e - 120 + 2/5 \theta_e - 250 = 0 \Rightarrow 3/5 \theta_e = 245 \Rightarrow \theta_e = \frac{245}{3/5} = 70^\circ C$$

$$\Delta V_{\text{جامد}} = V_1 \times \alpha \Delta \theta \Rightarrow \frac{\Delta V_{\text{جامد}}}{V_1} = \alpha \Delta \theta = 3 \times 10^{-5} \times (-50) = -15 \times 10^{-2} \xrightarrow{\text{برحسب درصد}} \Delta V_{\text{جامد}} = -0.15 \%$$

$$\Delta V_{\text{مایع}} = V_1' \times \beta \Delta \theta \Rightarrow \frac{\Delta V_{\text{مایع}}}{V_1'} = \beta \Delta \theta = 2 \times 10^{-4} \times (20) = 4 \times 10^{-2} \xrightarrow{\text{برحسب درصد}} \Delta V_{\text{مایع}} = 0.4 \%$$

۷۴- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۱ (فصل ۵)

$$W_{AB} = +P\Delta V = P_B V_B - P_A V_A = nRT_B - nRT_A = nR(T_B - T_A)$$

$$W_{CD} = -P\Delta V = -P(V_D - V_C) = P_C V_C - P_D V_D = nRT_C - nRT_D = nR(T_C - T_D)$$

$$\xrightarrow{\text{فرایندهای DA و BC هم‌دما هستند}} \frac{W_{AB} \text{ توسط گاز}}{W_{CD} \text{ توسط محیط}} = 1$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * فیزیک ۱ (فصل ۵)

۷۵- پاسخ: گزینه ۳

در فرایند انبساط هم‌دمای گاز آرمانی همه گرما داده شده به گاز، تبدیل به کار می‌شود ولی قانون دوم ترمودینامیک نقض نمی‌شود زیرا دستگاه به حالت اول بازمی‌گردد و تغییرات انرژی درونی گاز صفر است.

شیمی

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۱)

۷۶- پاسخ: گزینه ۲

ابتدا جرم اتمی میانگین را به دست می‌آوریم:

$$3 / 0.1 \times 10^{22} A \times \frac{1 \text{ mol } A}{6 / 0.2 \times 10^{23} A} \times \frac{x \text{ g } A}{1 \text{ mol } A} = 1 / 67 \Rightarrow x = 33 / 4 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

پس جرم اتمی میانگین عنصر A را برابر $33 / 4 \text{ amu}$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{cccc} 32 & 33 & 35 & 37 \\ & 0 & 1 & 3 & 5 \\ \text{درصد فراوانی:} & x & (70-x) & 20 & 10 \\ \frac{x \times 0 + 1 \times (70-x) + 3 \times 20 + 5 \times 10}{100} = 33 / 4 - 32 = 1 / 4 \\ 70 - x + 60 + 50 = 140 \Rightarrow x = 40\% \end{array}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۱)

۷۷- پاسخ: گزینه ۳

عبارت اول: درست: هرچه از هسته دورتر شویم، انرژی الکترون بیشتر می‌شود.
عبارت دوم: نادرست: اولاً الکترون لزوماً به حالت پایه باز نمی‌گردد، بلکه به انرژی کمتر باز می‌گردد و ثانیاً لزوماً در همه اتم‌ها $n = 1$ حالت پایه نیست.

عبارت سوم: درست: رنگ آبی مربوط به بازگشت الکترون از $n = 5$ به $n = 2$ است که انرژی بیشتری نسبت به رنگ قرمز دارد، پس بازگشت از $n = 3$ به $n = 2$ ، انرژی کمتر و طول موج بیشتری دارد.

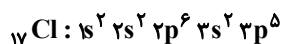
عبارت چهارم: درست: برخلاف مدل بور در مدل کوانتومی نمی‌توان جایگاه دقیق الکترون را مشخص کرد.

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل‌های ۱ و ۲) و شیمی ۲ (فصل ۱)

۷۸- پاسخ: گزینه ۴

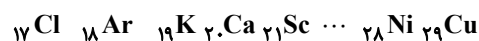
عبارت اول: درست؛ ${}_{29}\text{Cu}$ دارای دو یون پایدار Cu^+ و Cu^{2+} است. پس باید ظرفیت آن ذکر شود.عبارت دوم: درست؛ فقط Zn^{2+}

عبارت سوم: درست



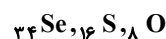
$$6 + 5 = 11$$

عبارت چهارم: درست



۸ عنصر واسطه
نافلز با واکنش‌پذیری ناچیز

عبارت پنجم: نادرست



$$8 + 16 + 34 = 58$$

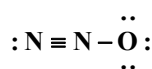
فلزهای قلیایی خاکی در گروه ۲ قرار دارند و عدد اتمی آن‌ها، دو واحد از گاز نجیب بیشتر است (۴، ۱۲، ۲۰، ۳۸، ۵۶، ۸۸)، پس عدد اتمی ۵۸ متعلق به یک فلز قلیایی خاکی نیست.

۷۹- پاسخ: گزینه ۲

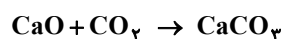
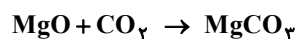
▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۲)

الف) نادرست؛ اتم‌ها در دگرشکل‌ها یکسان هستند.

ب) درست



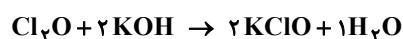
پ) درست



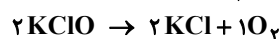
$$\frac{n_1}{V_1} = \frac{n_2}{V_2} \quad \text{ت) درست؛ زیرا}$$

۸۰- پاسخ: گزینه ۴

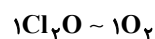
▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۱ (فصل ۲)



$$174 \text{ g Cl}_2\text{O} \times \frac{1 \text{ mol Cl}_2\text{O}}{87 \text{ g Cl}_2\text{O}} \times \frac{2 \text{ mol KOH}}{1 \text{ mol Cl}_2\text{O}} \times \frac{56 \text{ g KOH}}{1 \text{ mol KOH}} = 224 \text{ g KOH}$$



ضریب $KClO$ در هر دو واکنش برابر است، پس:



ضمناً:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

$$\frac{22/4}{273} = \frac{V}{2 \times 273} \Rightarrow V = 44/8 \text{ L} \quad \text{حجم مولی:}$$

$$174 \text{ g Cl}_2\text{O} \times \frac{1 \text{ mol Cl}_2\text{O}}{87 \text{ g Cl}_2\text{O}} \times \frac{1 \text{ mol O}_2}{1 \text{ mol Cl}_2\text{O}} \times \frac{44/8 \text{ L O}_2}{1 \text{ mol O}_2} = 89/6 \text{ L O}_2$$

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۱ (فصل ۳)

۸۱- پاسخ: گزینه ۴

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) زلال و شفاف بودن یک نمونه آب دلیلی بر خالص بودن آن نیست.

۲) با افزودن چند قطره محلول سدیم نیترات به محلول آبی حاوی یون‌های نقره ترکیبی نامحلول در آب حاصل نمی‌شود (یون نقره با یون کلرید ترکیب نامحلول در آب حاصل می‌کند).

۳) کلسیم کلرید و سدیم فسفات، ترکیب‌هایی محلول در آب هستند ولی باریم سولفات نامحلول در آب است.

۸۲- پاسخ: گزینه ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

بررسی فرمول شیمیایی ترکیب‌ها:

آمونیم سولفات $(NH_4)_2SO_4$: آنیون و کاتیون هر دو چند اتمی هستند.

پتاسیم نیترات KNO_3 : کاتیون تک اتمی و آنیون چند اتمی، شمار یون‌ها برابر است.

کلسیم هیدروکسید $Ca(OH)_2$: کاتیون تک اتمی دارد؛ شمار آنیون‌ها ۲ برابر شمار کاتیون‌ها است.

آمونیم کربنات $(NH_4)_2CO_3$: آنیون و کاتیون چند اتمی هستند.

ترکیب درست:

منیزیم فسفات $Mg_3(PO_4)_2$: کاتیون تک اتمی و شمار کاتیون‌ها ۱/۵ برابر شمار آنیون‌ها است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

۸۳- پاسخ: گزینه ۱

با استفاده از چگالی، حجم ۵۴۰ گرم محلول برابر ۵۰۰ میلی‌لیتر محاسبه می‌شود. این حجم از محلول دارای ۰/۰۱ مول سولفات است که جرم آن برابر ۰/۹۶ گرم است:

$$540 \text{ g} \times \frac{1 \text{ mL}}{1/0.8 \text{ g}} \times \frac{0/02 \text{ mol SO}_4^{2-}}{1000 \text{ mL}} \times \frac{96 \text{ g SO}_4^{2-}}{1 \text{ mol SO}_4^{2-}} = 0/96 \text{ g SO}_4^{2-}$$

$$\text{ppm} = \frac{0/96}{m} \times 10^6 = 480 \Rightarrow m = 2000 \text{ g}$$

جرم محلول اولیه ۵۴۰ گرم بود، پس با افزودن ۱۴۶۰ گرم آب به محلول می‌توان غلظت یون سولفات را به ۴۸۰ ppm رساند.

۸۴- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

با توجه به معادله انحلال پذیری، در دمای ۴۰ درجه سلسیوس انحلال پذیری ماده مورد نظر ۵۰ گرم در ۱۰۰ گرم آب است. پس ۱۵۰ گرم محلول سیر شده دارای ۵۰ گرم از ماده مورد نظر است:

$$75.0 \text{ g} \times \frac{50 \text{ g}}{150 \text{ g}} = 25.0 \text{ g}$$

۸۵- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۱ (فصل ۳)

بررسی عبارت های نادرست:

عبارت اول: اگر یک مخلوط گازی حاوی F_2 و HCl را سرد کنیم، گاز HCl به دلیل داشتن نقطه جوش بیشتر، راحت تر به مایع تبدیل می شود.
عبارت دوم: به دلیل قطبی بودن، جاذبه های بین مولکول های HCl قوی تر از جاذبه های بین مولکول های F_2 است.
بررسی عبارت های درست:
عبارت های سوم و چهارم: HCl قطبی و F_2 ناقطبی است.

۸۶- پاسخ: گزینه ۱

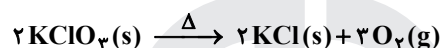
▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۲ (فصل ۱)

- مورد اول یک فلز است (Pb یا Sn).
- مورد دوم یک نافلز یا یک شبه فلز است (Si).
- مورد سوم فقط با گرافیت (C) مطابقت دارد.
- به این ترتیب پاسخ های گزینه ۱ مطابقت دارد.

۸۷- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۱)

واکنش موازنه شده:



$$\text{جرم } \text{KClO}_3 \text{ خالص} = 612 / 5 \text{ g} \times \frac{80}{100} = 490 \text{ g KClO}_3$$

فرآورده جامد مانده در ظرف KCl است و ابتدا مقدار نظری آن را به دست می آوریم:

$$x \text{ g KCl} = 490 \text{ g KClO}_3 \times \frac{1 \text{ mol KClO}_3}{122.5 \text{ g KClO}_3} \times \frac{2 \text{ mol KCl}}{2 \text{ mol KClO}_3} \times \frac{74.5 \text{ g KCl}}{1 \text{ mol KCl}} = 298 \text{ g KCl}$$

$$\text{بازده درصدی} = \frac{\text{مقدار نظری}}{\text{مقدار عملی}} \times 100$$

$$\text{بازده درصدی} = \frac{149 \text{ g}}{298 \text{ g}} \times 100 = 50\%$$

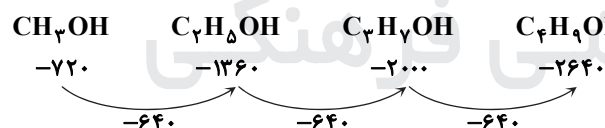
۸۸- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

$$2/3 \text{ g C}_2\text{H}_5\text{OH} \times \frac{1 \text{ mol C}_2\text{H}_5\text{OH}}{46 \text{ g C}_2\text{H}_5\text{OH}} \times \frac{x \text{ kJ}}{1 \text{ mol C}_2\text{H}_5\text{OH}} \times \frac{1 \text{ mol CO}_2}{50 \text{ kJ}} = 1/36 \text{ mol CO}_2$$

$$x = 1360 \text{ kJ} \Rightarrow \Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}) = -1360 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

می دانیم که میزان افزایش اندازه گرمای حاصل از سوختن در یک خانواده به ازای افزایش یک کربن مقداری تقریباً ثابت است، پس:



۸۹- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

$$88 \text{ g N}_2\text{O} \times \frac{1 \text{ mol N}_2\text{O}}{44 \text{ g N}_2\text{O}} = 2 \text{ mol N}_2\text{O}$$



اولیه	۲	۰	۰
تغییرات	-۲x	+۲x	+x
	۲-۲x	۲x	x

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow \frac{2-2x}{2+0+0} = \frac{1}{25} \Rightarrow \frac{2+x}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow x = 0.5$$

در دما و حجم ثابت:

اگر واکنش کامل شود:

$$2 \text{ mol N}_2\text{O} \times \frac{1 \text{ mol O}_2}{2 \text{ mol N}_2\text{O}} = 1 \text{ mol O}_2$$

$$R = \text{ثابت} \Rightarrow \frac{\Delta n \text{ O}_2}{\Delta t} = \text{ثابت} \Rightarrow \frac{0.5}{t} = \frac{1}{20} \Rightarrow t = 10 \text{ min}$$

$$\frac{[N_2]}{[N_2\text{O}]} = \frac{2x}{2-2x} = \frac{1}{1} = 1$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

۹۰- پاسخ: گزینه ۳

عبارت اول: نادرست

$$2 \text{ mol NH}_3 \times \frac{1 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol NH}_3} = 2 \text{ mol HCl}$$

$$4 - 2 = 2 \text{ mol HCl} \Rightarrow [\text{HCl}] = \frac{2 \text{ mol}}{5 \text{ L}} = 0.4 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

$$3 \text{ mol NH}_3 \times \frac{1 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol NH}_3} = 3 \text{ mol HCl}$$

$$4 - 3 = 1 \text{ mol HCl} \Rightarrow [\text{HCl}] = \frac{1}{5} = 0.2 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

با کاهش غلظت HCl، سرعت واکنش کم می‌شود.

عبارت دوم: درست؛ مقدار HCl باقی‌مانده در آب کمتری حل شده و باعث افزایش غلظت محلول می‌شود.

عبارت سوم: درست؛ ابعاد ذرات جامد کوچک‌تر و سطح تماس بیشتر است.

عبارت چهارم: درست؛ افزایش دما باعث افزایش سرعت واکنش می‌شود.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۲)

۹۱- پاسخ: گزینه ۲

الف) درست؛ میخک دارای ۲- هپتانول است:

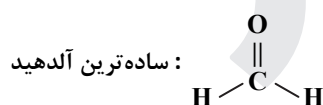


فرمول هر دو ترکیب $\text{C}_7\text{H}_{14}\text{O}$ می‌باشد.

ب) درست

ساده‌ترین اتر: $\text{CH}_3 - \text{O} - \text{CH}_3$

ساده‌ترین آلکان: CH_4



پ) نادرست؛ جرم مولی اتانول ($\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$) از استون ($\text{C}_3\text{H}_6\text{O}$) کمتر است.

ت) نادرست؛ دارچین دارای عامل آلدهیدی و بنزوئیک اسید دارای عامل کربوکسیل است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

۹۲- پاسخ: گزینه ۲

بررسی عبارت‌های نادرست:

ب) طی تولید برخی از پلیمرها، اتم کربن یک مولکول مونومر باید به اتم کربن مولکول دیگری از مونومر متصل شود و زنجیری سیرشده حاصل شود.

پ) با دقت در ساختار مولکول تفلون می‌توان دریافت این مولکول از تکرار مجموعه‌ای اتم‌های کربن و فلوئور به نام واحد تکرارشونده پدید آمده است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

۹۳- پاسخ: گزینه ۳

مونومر پلی‌استیرن، استیرن نام دارد که هیدروکربنی آروماتیک با فرمول مولکولی C_8H_8 است.

بررسی گزینه‌های نادرست:

۱) در ساختار مولکول مونومر آن یک حلقه و ۴ پیوند دوگانه وجود دارد.

۲) مونومر آن هیدروکربنی آروماتیک است که شمار اتم‌های کربن مولکول آن با شمار اتم‌های هیدروژن آن برابر است.

۴) شمار اتم‌ها در یک واحد تکرارشونده از مولکول این پلیمر با مجموع شمار اتم‌های یک مولکول مونومر آن یکسان است.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۲ (فصل ۳)

۹۴- پاسخ: گزینه ۲

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت اول: در ساختار استرها، دو بخش که یکی از آن‌ها حداقل یک اتم کربن دارد و یکی دیگر می‌تواند اتم هیدروژن باشد یا دو گروه هیدروکربنی به گروه عاملی متصل هستند.

عبارت سوم: نخستین عضو خانواده الکل‌ها، متانول و نخستین عضو خانواده کربوکسیلیک اسیدها، متانوئیک اسید (فورمیک اسید) است.

۹۵- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۲ (فصل ۳)

مونومرها دی الکل ($C_3H_8O_2$) و دی اسید ($C_8H_6O_4$) هستند و پلیمر حاصل از نوع پلی استر است. در فرایند بسپارش این نوع پلیمرها به ازای هر مول دی الکل، یک مول دی اسید مصرف می شود و به ازای مصرف شدن x مول از هر کدام یک مول پلی استر که هر مولکول آن دارای x واحد تکرار شونده است حاصل می شود:

$$0.004 \text{ mol P} \times \frac{x \text{ mol M}}{1 \text{ mol P}} = 0.6 \text{ mol M} \Rightarrow x = 1500$$

پلی بسپارش به ازای هر مولکول دی اسید و هر مولکول دی الکل، ۲ مولکول آب تولید می شود، پس فرمول شیمیایی واحد تکرار شونده $C_{11}H_{10}O_4$ ($206 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$) است و چون مولکول پلی استر حاصل ۱۵۰۰ واحد تکرار شونده دارد، جرم مولی آن $309000 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ گرم بر مول است. ($1500 \times 206 = 309000$)

۹۶- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

عبارت اول: نادرست؛ پاک کننده های غیر صابونی همانند پاک کننده های صابونی خاصیت بازی دارند.

عبارت دوم: نادرست؛ فرمول مولکولی الکل سه عاملی حاصل از آبکافت این جری، $C_3H_8O_3$ است.

$$\text{شمار جفت الکترون های پیوندی} = \frac{(3 \times 4) + (8 \times 1) + (3 \times 2)}{2} = 13$$

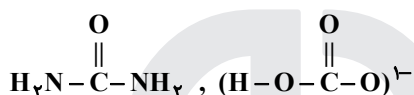
هر اتم اکسیژن دو جفت الکترون ناپیوندی و در مجموع ۶ جفت الکترون ناپیوندی دارد. بنابراین:

$$\frac{13}{6} \neq 2/5$$

عبارت سوم: درست

الکل سه عاملی + صابون ۳ $\rightarrow 3 \text{ NaOH}$ + چربی

عبارت چهارم: درست؛ عدد اکسایش اتم کربن در هر دو ماده $CO(NH_2)_2$ و $NaHCO_3$ برابر ۴ است.



۹۷- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

ابتدا شمار مول های $Al(OH)_3$ و $Mg(OH)_2$ را در شربت محاسبه می کنیم:

$$10^{-3} \text{ mL} \times \frac{1/125 \text{ g شربت}}{1 \text{ mL شربت}} \times \frac{468 \text{ g } Al(OH)_3}{106 \text{ g شربت}} \times \frac{1 \text{ mol } Al(OH)_3}{78 \text{ g } Al(OH)_3} = 6/75 \times 10^{-3} \text{ mol } Al(OH)_3$$

$$10^{-3} \text{ mL} \times \frac{1/125 \text{ g شربت}}{1 \text{ mL شربت}} \times \frac{174 \text{ g } Mg(OH)_2}{106 \text{ g شربت}} \times \frac{1 \text{ mol } Mg(OH)_2}{58 \text{ g } Mg(OH)_2} = 3/375 \times 10^{-3} \text{ mol } Mg(OH)_2$$

اکنون با استفاده از pH و حجم شیره معده شمار مول های H^+ را به دست می آوریم:

$$pH = 1/4 \Rightarrow [H^+] = 10^{-1/4} = 10^{-2} \times 10^{+3/4} = 4 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{mol } H^+ = 1 \text{ L} \times 4 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = 0.04 \text{ mol}$$

هر مول $Al(OH)_3$ سه مول و هر مول $Mg(OH)_2$ دو مول یون هیدروکسید تولید می کنند.

اگر حجم شربت مورد نیاز برای خنثی کردن این تعداد یون H^+ را V لیتر در نظر بگیریم، آنگاه داریم:

$$0.04 = (6/75 \times 10^{-3} \times 3V) + (3/375 \times 10^{-3} \times 2V) \Rightarrow 0.04 = 27 \times 10^{-3} V \Rightarrow V = 1/48 \text{ L} = 14.8 \text{ mL}$$

۹۸- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: دشوار * شیمی ۳ (فصل ۱)

معادله موازنه شده واکنش چنین است:



$$pH_1 = 0/1 \Rightarrow [H^+]_1 = 10^{-0/1} = 10^{-1} \times 10^{+9/9} = 0/8 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$pH_2 = 1 \Rightarrow [H^+]_2 = 10^{-1} = 0/1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$|\Delta[H^+]| = |\Delta[HNO_3]| = 0/8 - 0/1 = 0/7 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$|\Delta \text{mol}(HNO_3)| = 0/25 \text{ L} \times 0/7 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = \frac{7}{40} \text{ mol}$$

$$\Delta \text{mol}(NO_2) = \frac{1}{2} \Delta \text{mol}(HNO_3) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{40} = \frac{7}{80} \text{ mol}$$

$$\bar{R}_{NO_2} = \frac{\frac{7}{80} \text{ mol} \times \frac{22400 \text{ mL}}{1 \text{ mol}}}{200 \text{ s} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}} = 588 \text{ mL} \cdot \text{min}^{-1}$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۱)

۹۹- پاسخ: گزینه ۴

مورد اول: نادرست؛ اتانول غیرالکترولیت است و حل شدن آن در آب فقط به شکل مولکولی است. از این رو غلظت یون‌های H_3O^+ و OH^- دستخوش تغییر نمی‌شود و pH محلول آبی آن برابر ۷ است.

مورد دوم: نادرست؛ در کربوکسیلیک اسیدها با افزایش شمار اتم‌های کربن، قدرت اسیدی کاهش می‌یابد و در نتیجه ثابت یونش کوچک‌تر می‌شود.

مورد سوم: نادرست؛ با افزایش غلظت مولی محلول‌های اسیدی یا بازی درجه یونش آن‌ها کاهش می‌یابد.

مورد چهارم: درست

$$[OH^-] = [NH_4^+] = M\alpha = 0.5 \times 0.3 = 0.15$$

پس مجموع غلظت یون‌ها برابر است با:

$$0.15 \times 2 = 0.3$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۱۰۰- پاسخ: گزینه ۲

بررسی همه گزینه‌ها:

(۱) نادرست؛ مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در بنزوئیک اسید با فرمول مولکولی $C_7H_6O_2$ برابر ۲- و مجموع عدد اکسایش اتم‌های نیتروژن در هیدرازین با فرمول مولکولی N_2H_4 برابر ۴- است.

(۲) درست؛ عدد اکسایش آهن در Fe_3O_4 برابر $+\frac{8}{3}$ است. عدد اکسایش یک یون نمی‌تواند مقدار کسری یا اعشاری باشد، پس درمی‌یابیم

که عدد اکسایش یون‌های آهن در این ترکیب متفاوت است که میانگین آن‌ها برابر $+\frac{8}{3}$ شده است. در این ساختار دو یون Fe^{3+} و یک

یون Fe^{2+} وجود دارد.

(۳) نادرست



در نیم‌واکنش آندی به‌ازای مصرف هر مول متان و تولید CO_2 ، ۸ مول الکترون مبادله می‌شود؛ زیرا عدد اکسایش اتم C در CH_4 و CO_2 به‌ترتیب برابر ۴- و ۴+ و اختلاف آن‌ها برابر ۸ واحد است.

(۴) نادرست؛ هرچه پتانسیل کاهش استاندارد نیم‌سلولی منفی‌تر باشد، گونه کاهنده آن تمایل بیشتری به اکسایش و از دست دادن الکترون دارد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۲)

۱۰۱- پاسخ: گزینه ۴

بررسی همه گزینه‌ها:

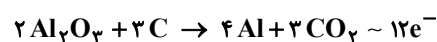
(۱) نادرست؛ در برقکافت منیزیم کلرید مذاب برخلاف فرایند هال چگالی فلز مذاب کمتر از چگالی الکترولیت مذاب است و از قسمت‌های بالای سلول جمع‌آوری می‌شود.

(۲) نادرست؛ در فرایند هال، جنس آند و کاتد یکسان و از گرافیت است.

(۳) نادرست؛ کلسیم کلرید به‌عنوان ناخالصی به کاهش نقطه ذوب سدیم کلرید کمک می‌کند. (مانند ناخالصی شن و ماسه یا سدیم کلرید در ذوب یخ و برف!)

در این فرایند آب وجود ندارد و انحلال گرماده $CaCl_2$ در آب ارتباطی با این فرایند ندارد.

(۴) درست؛



برای برابری مول الکترون‌ها معادله دوم را در عدد ۶ ضرب می‌کنیم که در نتیجه:

$$\frac{4Al}{6Mg} = \frac{4 \times 27g}{6 \times 24g} = \frac{27}{6 \times 6} = \frac{3}{4} = 0.75$$

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۳)

۱۰۲- پاسخ: گزینه ۱

SiC جامد کووالانسی است و فرمول شیمیایی آن فرمول مولکولی نیست.

MgO جامد یونی است و فرمول شیمیایی آن فرمول مولکولی نیست.

سایر ترکیبات مولکولی هستند ولی در بین آن‌ها H_2S و SCO قطبی هستند؛ بنابراین فقط ویتامین A و گوگرد تری اکسید می‌توانند

پاسخ سؤال باشند.

▲ مشخصات سؤال: ساده * شیمی ۳ (فصل ۳)

۱۰۳- پاسخ: گزینه ۴

برای عناصر یک دوره، کاتیون با بار مثبت بیشتر، شعاع کوچک‌تر و آنیون با بار منفی بیشتر، شعاع بزرگ‌تری دارد.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

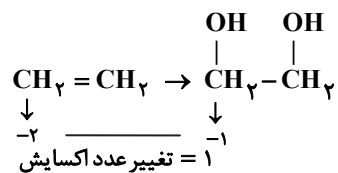
۱۰۴- پاسخ: گزینه ۴

همه عبارت‌ها درست هستند.

▲ مشخصات سؤال: متوسط * شیمی ۳ (فصل ۴)

۱۰۵- پاسخ: گزینه ۱

در فرایند اکسایش اتن به اتیلن گلیکول هر اتم کربن ۱ واحد اکسید می‌شود و مجموع تغییر عدد اکسایش اتم‌های کربن برابر ۲ است.



خریشه دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی