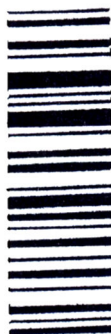




شماره داوطلب
نام خانوادگی و نام

خراسان رضوی
شهر



سروش اندیشه

مؤسسه فرهنگی هنری

تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۱/۱۴

جمهوری اسلامی ایران

وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی

موسسه سروش اندیشه حیات

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.

امام خمینی (ره)

پاسخنامه آزمون شبیه ساز امتحان نهایی

گروه آزمایشی علوم تجربی

شماره داوطلبی:

نام و نام خانوادگی:

مدت پاسخگویی: ۱۶۰ دقیقه

تعداد سوال: ۴۱ عدد

عنوان مواد امتحانی تعداد، شماره سوالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سوال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
۱	دینی	۲۴	۱	۲۴	۶۰ دقیقه
۲	ریاضی	۱۷	۱	۱۷	۱۰۰ دقیقه

برای مشاهده پاسخنامه آزمون به سایت موسسه مراجعه نمایید

پاسخ سؤال ۱: (۵/۵ نمره)

اگر آنچه مشرکان شریک خدا قرار می‌دهند همچون خدا مخلوقاتی خلق کرده بودند، در این صورت جا داشت که انسان به شک بیفتد و به خدایان دیگر نیز معتقد باشد.
(دین و زندگی دوازدهم، صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

پاسخ سؤال ۲: (۵/۵ نمره)

سنت امداد خاص (توفیق الهی)
(دین و زندگی دوازدهم، صفحه‌های ۶۵ و ۷۱)

پاسخ سؤال ۳: (۵/۵ نمره)

بدون شک از شوق آمدن به سوی خداوند جان می‌دادند و بندبند وجودشان از محبت خداوند از هم می‌گسست.
(دین و زندگی دوازدهم، صفحه ۸۰)

پاسخ سؤال ۴: (۵/۵ نمره)

خداوند به ضررهای یک عمل نگاه می‌کند، نه دوست داشتن یا نداشتن مردم.
(دین و زندگی دوازدهم، صفحه ۹۷)

پاسخ سؤال ۵: (۵/۵ نمره)

عبارت «قبله» به معیار اول یعنی توحید، اعتقاد به توحید، توحید محوری، اصل توحید و مبنا بودن توحید اشاره دارد.
عبارت «بعده» به معیار دوم یعنی معاد، اعتقاد به معاد، اعتقاد به آخرت و آخرت‌گرایی اشاره دارد.
(دین و زندگی دوازدهم، صفحه‌های ۱۲ و ۱۰۹)

پاسخ سؤال ۶: (هر مورد ۲۵/۵ نمره)

الف) نادرست ب) نادرست ج) درست د) درست
(دین و زندگی دوازدهم، صفحه‌های ۱۹، ۱۰۹ و ۱۳۲)

پاسخ سؤال ۷: (هر مورد ۵/۵ نمره)

الف) فطرت خویش ب) قضای الهی ج) مساوات و قسط د) علم تجربی
(دین و زندگی دوازدهم، صفحه‌های ۷، ۵۶، ۱۱۰ و ۱۳۰)

پاسخ سؤال ۸: (هر مورد ۲۵/۵ نمره)

الف) ۳ ب) ۵ ج) ۴ د) ۱
(دین و زندگی دوازدهم، صفحه‌های ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۳ و ۱۳۶)

پاسخ سؤال ۹: (۵/۵ نمره)

انسان بتواند با هر چیز خدا را ببیند.
(دین و زندگی دوازدهم، صفحه ۱۲)

پاسخ سؤال ۱۰: (۵/۵ نمره)

بدین معناست که ایشان را واسطه ولایت خود و رساننده فرمان‌هایش قرار داده است.
(دین و زندگی دوازدهم، صفحه ۱۹)

پاسخ سؤال ۱۱: (۵/۵ نمره)

وقتی موجب شرک است که این توانایی را از خود ایشان و مستقل از خدا بدانیم.
(دین و زندگی دوازدهم، صفحه ۲۴)

پاسخ سؤال ۱۲: (۵/۵ نمره)

فاقد حسن فاعلی است.
(دین و زندگی دوازدهم، صفحه ۴۵)

پاسخ سؤال ۱۳: (۵/۵ نمره)

اشاره به مسئولیت‌پذیری از شواهد اختیار دارد.
(دین و زندگی دوازدهم، صفحه‌های ۵۳ و ۵۴)

پاسخ سؤال ۱۴: (۵/۵ نمره)

در حق او صدقه دهیم و برای او دعای خیر و طلب آمرزش کنیم.
(دین و زندگی دوازدهم، صفحه ۸۷)

پاسخ سؤال ۱۵: (هر مورد ۵/۰ نمره)

الف) گناه، آلودگی است و توبه، پاک شدن از آلودگی هاست. توبه، گناهان را از قلب خارج می کند و آن را شست و شو می دهد. به همین جهت این عمل را «پیرایش» یا «تخلیه» نیز می گویند.

ب) قرآن کریم از قوانین حاکم بر جهان خلقت که پدیده های طبیعی یا زندگی فردی و اجتماعی انسان ها را در بر می گیرد با عنوان سنت های الهی یاد کرده است.

(دین و زندگی دوازدهم، صفحه های ۶۷ و ۸۲)

پاسخ سؤال ۱۶: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

الف) گزینه ۲

ب) گزینه ۱

(دین و زندگی دوازدهم، صفحه های ۸۸ و ۹۹)

پاسخ سؤال ۱۷: (هر مورد ۲۵/۰ نمره)

الف) مستحب

ب) واجب کفایی

ج) حرام

د) جایز و حلال

(دین و زندگی دوازدهم، صفحه های ۹۷، ۱۰۱، ۱۰۳ و ۱۰۴)

پاسخ سؤال ۱۸: (۱/۵ نمره)

تسلیم بودن در برابر امیال نفسانی و فرمان پذیری از طاغوت باعث می شود شخص، درونی ناآرام و شخصیتی ناپایدار داشته باشد. زیرا از یک سو هوای نفس وی هر روز خواسته جدیدی جلوی روی او قرار می دهد و از سوی دیگر قدرت های مادی که هر روز رنگ عوض می کنند و او را به بردگی جدیدی می کشانند.

(دین و زندگی دوازدهم، صفحه ۳۴)

پاسخ سؤال ۱۹: (۱ نمره)

حکمت به معنای علم محکم و استوار و به دور از خطاست که هدف درست و راه رسیدن به آن را نشان می دهد و مانع لغزش ها و تباهی ها می شود. انسان حکیم به درجاتی از بصیرت و روشن بینی می رسد که می تواند در شرایط سخت و پیچیده حق را از باطل تشخیص دهد و گرفتار باطل نشود.

(دین و زندگی دوازدهم، صفحه ۴۷)

پاسخ سؤال ۲۰: (هر مورد ۵/۰ نمره)

۱- قدر و قضای الهی با اختیار انسان ناسازگار است. ۲- تصور می کنند تقدیر، چیزی غیر از قانونمندی جهان و نظم در آن است. ۳- وقتی به حادثه ای تعلق گرفت، هر قانونی را لغو و هر نظمی را بر هم می زند. (دو مورد کافی است)

(دین و زندگی دوازدهم، صفحه ۵۷)

پاسخ سؤال ۲۱: (۱ نمره)

در امتحان بشری غالباً از حقیقت درون افراد بی خبریم و می کوشیم تا از طریق امتحان کردن آنها به آگاهی لازم برسیم، ولی امتحان خداوند علیم برای آگاه شدن از درون افراد نیست. بلکه برای رشد دادن و به ظهور رساندن استعدادها و نشان دادن تمایلات درونی افراد است.

(دین و زندگی دوازدهم، صفحه ۶۸)

پاسخ سؤال ۲۲: (۱/۵ نمره)

او ابتدا انسان را با این وعده که «گناه کن و بعد توبه کن» به سوی گناه می کشاند و وقتی که به گناه آلود شد، او را از رحمت الهی مأیوس می سازد و می گوید: «آب که از سرگذشت چه یک وجب، چه صد وجب». در این حالت انسان با خود می گوید که کار از کار گذشته و پرونده عملم نزد خداوند آنقدر سیاه است که دیگر توبه ام پذیرفته نیست، در حالی که آدمی هر قدر هم بد باشد، اگر واقعاً توبه کند و نادم و پشیمان شود، حتماً خداوند توبه اش را می پذیرد.

(دین و زندگی دوازدهم، صفحه های ۸۴ و ۸۵)

پاسخ سؤال ۲۳: (۱ نمره)

دعوت به تفکر و تدبر در جای جای کتاب آسمانی مشاهده می شود. نزول تدریجی آیات قرآن کریم دعوت مکرر این کتاب به خردورزی و دانش و تشویق های دائمی رسول خدا (ﷺ) سد جاهلیت و خرافه پرستی را شکست و یکی از جاهل ترین جوامع را مشتاق علم ساخت.

(دین و زندگی دوازدهم، صفحه ۱۱۴)

پاسخ سؤال ۲۴: (۱ نمره)

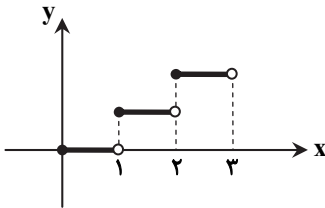
میان یک پیام و روش تبلیغ آن باید تناسب منطقی و معقول برقرار باشد. حق را نمی توان با روش های نادرست به دیگران رساند. دین اسلام یک دین منطقی و استدلالی است و هر آموزه و حکم آن بر اساس حکم الهی تنظیم شده است. چنین دینی را نمی توان با تعصب های جاهلانه یا با روش های فریبکارانه تبلیغ کرد و نظر مردم را به سوی آن جلب نمود.

(دین و زندگی دوازدهم، صفحه ۱۳۲)

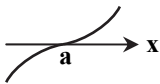
الف) درست؛ با توجه به نمودار $f(x)$ مشاهده می‌شود این تابع اکیداً نزولی است.



ب) نادرست؛ تابع f روی بازه $[1, 2]$ مشتق‌پذیر نیست؛ زیرا در $x = 2$ پیوستگی چپ ندارد و در نتیجه مشتق چپ ندارد.



ج) نادرست؛ زیرا ممکن است $f'(a) = 0$ ولی تابع f در $x = a$ اکستریم نباشد.



الف) ۴؛ زیرا:

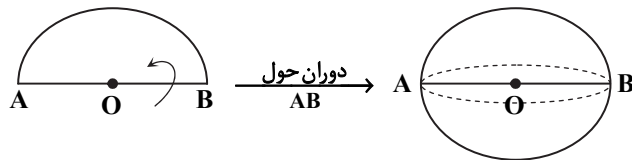
$$(f^{-1} \circ g^{-1})(v) = f^{-1}(g^{-1}(v))$$

$$g^{-1}(v) = a \Rightarrow g(a) = v \Rightarrow a^3 - 1 = v \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(v)) = f^{-1}(a) = f^{-1}(2) = 4$$

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u) \Rightarrow y = f(x^2 + 1) \Rightarrow y' = 2xf'(x^2 + 1) \xrightarrow{x=2} y' = 4f'(\Delta) = 28$$

ب) ۲۸؛ زیرا:

ج) کره



$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

الف) گزینه ۱؛ زیرا:

ب) گزینه ۳

نکته: در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجه اول $(x-a)$ ، باقی‌مانده تقسیم برابر $f(a)$ است.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow p(-2) = 2m \Rightarrow -8 + 8 - 2m - 5 = 2m \Rightarrow 5m = -5 \Rightarrow m = -1$$

نکته: برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k > 0$ ، نمودار $y = f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور x به دست آورد.

اگر $k < 0$ ، ابتدا نمودار f نسبت به محور y قرینه می‌شود، سپس با ضریب $\left|\frac{1}{k}\right|$ به طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.

نمودار تابع $y = \sqrt{2x+1}$ سه واحد به سمت چپ انتقال پیدا کرده است، پس باید به جای x ، $x+3$ قرار دهیم:

$$y = \sqrt{2x+1} \xrightarrow[\text{سه واحد به چپ}]{x \rightarrow x+3} y = \sqrt{2(x+3)+1} \Rightarrow y = \sqrt{2x+7}$$

از طرفی نمودار تابع حاصل با ضریب ۲ انبساط افقی پیدا کرده است؛ یعنی طول نقاط ۲ برابر شده است، پس باید x را به $\frac{x}{2}$ تبدیل کنیم:

$$y = \sqrt{2x+7} \xrightarrow[\text{انبساط افقی با ضریب ۲}]{x \rightarrow \frac{x}{2}} y = \sqrt{2\left(\frac{x}{2}\right)+7} \Rightarrow y = \sqrt{x+7}$$

پس ضابطه تابع جدید به صورت $y = \sqrt{x+7}$ است.



-۵

نکته: $D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$
ابتدا دامنه توابع f و g را به دست می آوریم:

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2} \Rightarrow 25 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 25 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5 \Rightarrow D_f = [-5, 5]$$

$$g(x) = \frac{x}{x-4} \Rightarrow x-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$D_{gof} = \left\{ x \in [-5, 5] \mid \sqrt{25 - x^2} \neq 4 \right\} \quad (1)$$

اکنون داریم:

$$\sqrt{25 - x^2} \neq 4 \Rightarrow 25 - x^2 \neq 16 \Rightarrow x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq \pm 3 \quad (2) \quad (1) \cap (2) \Rightarrow D_{gof} = [-5, 5] - \{\pm 3\}$$

-۶

نکته: توابع $y = a \cos bx + c$ و $y = a \sin bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

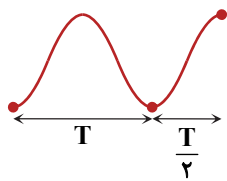
نقطه مینیمم تابع روی محور عرضها قرار دارد. پس ضابطه تابع به صورت $y = a \cos bx + c$ با شرط $a < 0$ است. اکنون داریم:

$$\begin{cases} \max = c + |a| = 3 \\ \min = c - |a| = -1 \end{cases} \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow |a| = 2 \xrightarrow{a < 0} a = -2$$

با توجه به نمودار تابع، $\frac{3}{4}$ دوره تناوب برابر ۶ است، بنابراین داریم:

$$\frac{3}{4}T = 6 \Rightarrow T = 8 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 8 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{4} \xrightarrow{b > 0} b = \frac{\pi}{4}$$

پس ضابطه تابع به صورت $y = -2 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 1$ است.



-۷

نکته: جوابهای کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

با توجه به اتحاد مثلثاتی $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ داریم:

$$2 \sin^2 x + 5 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 5 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2 - 2 \cos^2 x + 5 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3 = 0$$

با فرض $\cos x = t$ داریم:

$$2t^2 - 5t - 3 = 0 \xrightarrow{\Delta = 49} t = \frac{5 \pm 7}{4} \Rightarrow t = 3, t = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \cos x = 3 & \text{غ ق ق} \quad (-1 \leq \cos x \leq 1) \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

-۸

نکته: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. در این حالت برای محاسبه حد $\frac{f}{g}$ در نقطه a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به دست آوریم.

الف) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x - \sqrt{2x+8}}{x^2 - 4x} \times \frac{x + \sqrt{2x+8}}{x + \sqrt{2x+8}} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{(x^2 - 4x)(x + \sqrt{2x+8})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+2)}{x(x-4)(x + \sqrt{2x+8})} = \frac{6}{4 \times 8} = \frac{3}{16}$

نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجه n به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیر صفر است. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n$$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x}{4x^2 - x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{-x^3} = -2$



-۹

نکته: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ در این صورت اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{[x]} + a}{x^2 - 9} = \frac{4 + a}{0^-} = +\infty \text{ است؛ بنابراین: } [x] = 2, x \rightarrow 3^-$$

با توجه به اینکه حاصل حد برابر $+\infty$ است، پس باید علامت صورت کسر منفی باشد؛ بنابراین:

$$4 + a < 0 \Rightarrow a < -4$$

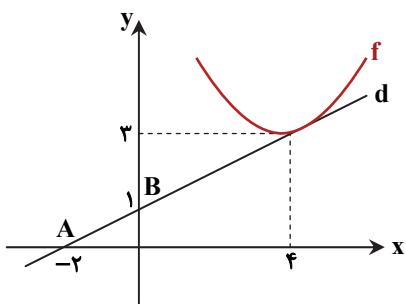
-۱۰

نکته: شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد.

ابتدا شیب خط d و معادله آن را به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} A(-2, 0) \\ B(0, 1) \end{cases} \Rightarrow m_d = \frac{1-0}{0+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{معادله خط } d: y = \frac{1}{2}x + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \xrightarrow{x=4} y = 3 \Rightarrow f(4) = 3$$

شیب خط d با $f'(4)$ برابر است. بنابراین:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - 3}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \frac{1}{2} f'(4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

-۱۱

نکته: اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق پذیر باشند، آن‌گاه توابع kf ($k \in \mathbb{R}$), $f \pm g$, fg و $\frac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$) نیز در $x = a$ مشتق پذیرند و داریم:

$$(kf)'(a) = kf'(a) \quad (\text{ب})$$

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a) \quad (\text{الف})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2} \quad (\text{ت})$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \quad (\text{پ})$$

نکته: اگر f تابعی بر حسب u و u تابعی از x باشد: $y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{3x+1}}\right)(x^3 - 2x)^3 + 3(x^3 - 2x)^2(3x^2 - 2)(\sqrt{3x+1}) \quad (\text{الف})$$

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{3x+1}}\right)(x^2 - 1) - (2x)(\sqrt{3x+1})}{(x^2 - 1)^2} \quad (\text{ب})$$

-۱۲

نکته: آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a, a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ در بازه } [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

نکته: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x = a \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f \text{ در نقطه } = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

$$\text{آهنگ متوسط در بازه } [-1, 2] = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{1 - (-2)}{3} = 1$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر } = f'(x) = \frac{2(x+2) - 1(2x)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2} \Rightarrow f'(a) = \frac{4}{(a+2)^2}$$

$$\frac{4}{(a+2)^2} = 1 \Rightarrow (a+2)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a+2=2 \Rightarrow a=0 \\ a+2=-2 \Rightarrow a=-4 \end{cases}$$



نکته (آزمون مشتق اول): فرض کنیم c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق پذیر باشد:

الف) اگر علامت f' در $x = c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آن گاه $x = c$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.

ب) اگر علامت f' در $x = c$ از منفی به مثبت تغییر کند، آن گاه $x = c$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع f است.

پ) اگر f' در c تغییر علامت ندهد؛ به طوری که f' در یک همسایگی محذوف c همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد، آن گاه f در c ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

ابتدا نقاط بحرانی تابع f را به دست می آوریم:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=4} x = \frac{-4 \pm 2}{6} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}, x = -1$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} + \frac{2}{9} - \frac{1}{3} = -\frac{4}{27}, \quad f(-1) = -1 + 2 - 1 = 0$$

اکنون با رسم جدول تغییرات اکسترمم‌های نسبی تابع را مشخص می‌کنیم:

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	\searrow	$+\infty$
		اکیداً صعودی	اکیداً نزولی	اکیداً صعودی

$\Rightarrow A(-1, 0)$ ماکزیمم نسبی و $B\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{27}\right)$ مینیمم نسبی

نکته: برای یافتن اکسترمم‌های مطلق تابع پیوسته f در بازه $[a, b]$ مراحل زیر انجام می‌شود.

(۱) مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی f را می‌یابیم.

(۲) مقدار تابع را در هریک از نقاط بحرانی و همچنین در نقاط انتهایی بازه محاسبه می‌کنیم.

(۳) در مرحله ۲، بزرگ‌ترین عدد به دست آمده، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک‌ترین آن‌ها مینیمم مطلق تابع در بازه $[a, b]$ است.

$$xy = 24 \Rightarrow y = \frac{24}{x} \quad (1)$$

با فرض $P(x) = 3x + 2y$ داریم:

$$(1) \Rightarrow P(x) = 3x + 2\left(\frac{24}{x}\right) = 3x + \frac{48}{x} \Rightarrow P'(x) = 3 - \frac{48}{x^2}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 3 = \frac{48}{x^2} \Rightarrow x^2 = 16 \xrightarrow{x>0} x = 4 \xrightarrow{(1)} y = 6$$

دقت کنید می‌توان مسئله را بر حسب y نیز حل کرد:

$$xy = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{y} \quad (1)$$

$$P(x) = 3x + 2y \xrightarrow{(1)} P(x) = 3\left(\frac{24}{y}\right) + 2y = \frac{72}{y} + 2y \Rightarrow P'(x) = -\frac{72}{y^2} + 2$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 2 = \frac{72}{y^2} \Rightarrow y^2 = 36 \xrightarrow{y>0} y = 6 \xrightarrow{(1)} x = 4$$

نکته: مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

نکته: مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامند و معمولاً آن را با حرف e نمایش می‌دهند.

نکته: اگر در یک بیضی، اندازه نیم‌قطر بزرگ را a ، اندازه نیم‌قطر کوچک را b و نصف فاصله کانونی بیضی را c بنامیم، آن‌گاه: $a^2 = b^2 + c^2$ با توجه به شکل داریم:

$$MF + MF' = 2a \quad FF' = 2c \quad \text{از طرفی } M \text{ روی بیضی است بنابراین: } MF + MF' = 2a \quad (*)$$

$$MF + MF' = 2a \Rightarrow a + c = 8 \quad (1)$$

$$(*) \Rightarrow 2a + 2c = 16 \Rightarrow a + c = 8 \quad (1)$$

$$e = \frac{c}{a} = 0.6 \Rightarrow c = 0.6a \xrightarrow{(1)} a + 0.6a = 8 \Rightarrow a = 5 \xrightarrow{(1)} c = 3$$

خروج از مرکز بیضی 0.6 است، بنابراین:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

اکنون مقدار b را به دست می‌آوریم:

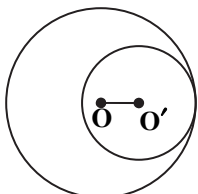


نکته: رابطه $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ معادله دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و شعاع r در صفحه مختصات است که به آن معادله استاندارد دایره می‌گوییم.

نکته: اگر $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله گسترده یک دایره باشد، مختصات مرکز این دایره $O(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2})$ است. شعاع این دایره برابر

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

نکته: دایره‌های $C(O, r)$ و $C'(O', r')$ مفروض‌اند اگر $OO' = r - r'$ ($r > r'$)، آن‌گاه دو دایره مماس درون هستند.



ابتدا مختصات مرکز و شعاع هر دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$C: x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow O(2, 0), r = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 0 + 48} = 4$$

$$C': (x+1)^2 + (y-m)^2 = 81 \Rightarrow O'(-1, m), r' = \sqrt{81} = 9$$

اکنون داریم:

$$OO' = \sqrt{(-1-2)^2 + (m-0)^2} = \sqrt{9+m^2}$$

دو دایره مماس درون هستند، بنابراین:

$$OO' = r' - r \Rightarrow \sqrt{9+m^2} = 5 \Rightarrow 9+m^2 = 25 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$$

راه حل اول:

نکته: در حالت کلی A_1, A_2, \dots, A_n پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)$$

$$P(A_2) = \frac{3}{10} \text{ و } P(A_1) = \frac{7}{10} \text{ مهرة خارج شده از ظرف اول، سفید یا زرد است که احتمال آن به ترتیب}$$

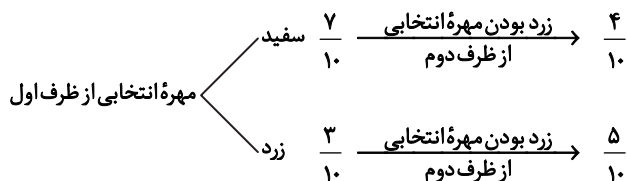
اگر پیشامد انتخاب مهرة زرد از ظرف دوم برابر B باشد، داریم:

$$P(B) = P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2) \Rightarrow P(B) = \frac{7}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{43}{100}$$

مهرة زرد ۴ مهرة زرد ۵

راه حل دوم:

با استفاده از نمودار درختی داریم:



$$B \text{ احتمال پیشامد} = \frac{7}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{28}{100} + \frac{15}{100} = \frac{43}{100}$$