سروش اندیشه
مؤسسه فرهنگی هنری

**کد آزمون** ۱۱۸۱

شماره داوطلب
نام خانوادگی و نام
- - -
خراسان رضوی
شهر

0513845369O

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.
امام خمینی (ره)

**دفترچه شماره ۱**

جمهوری اسلامی ایران
وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی موسسه سروش اندیشه حیات

# پاسخنامه آزمون شبیه ساز کنکور

## گروه آزمایشی علوم ریاضی

نام و نام خانوادگی: شماره داوطلبی:

تعداد سوال: ۱۰۵عدد مدت پاسخگویی: ۱۴۵دقیقه

**عنوان مواد امتحانی تعداد،شماره سوالات و مدت پاسخگویی**

| ردیف | مواد امتحانی | تعداد سوال | از شماره | تا شماره | مدت پاسخگویی |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | ریاضیات | ۴۰ | ۱ | ۴۰ | ۷۰ دقیقه |
| ۲ | فیزیک | ۳۵ | ۴۱ | ۷۵ | ۴۵ دقیقه |
| ۳ | شیمی | ۳۰ | ۷۶ | ۱۰۵ | ۳۰ دقیقه |

**برای مشاهده پاسخنامه آزمون به سایت موسسه مراجعه نمایید**

## تست و پاسخ ۱

اگر $x=\alpha$ جواب معادلهٔ $\frac{۳}{x+۱}=۱+\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}$ باشد، حاصل $\alpha^{۳}+\frac{۱}{\alpha^{۳}}$ کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۳/۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۴

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**خودت حل کنی بهتره** از فرمول اتحاد چاق و لاغر برای عبارت $۱+\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}$ که عبارت چاق است، استفاده کنید.

**درس نامه** اتحادهای جبری

| مثال | فرمول | نام اتحاد |
|---|---|---|
| $(\sqrt{۳}+۱)^{۲}=۳+۲\sqrt{۳}+۱=۴+۲\sqrt{۳}$ | $(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$<br>$(a-b)^{۲}=a^{۲}-۲ab+b^{۲}$ | مربع دو جمله‌ای |
| $(x+\frac{۱}{x})^{۳}=x^{۳}+\frac{۱}{x^{۳}}+۳(x+\frac{۱}{x})$ | $(a+b)^{۳}=a^{۳}+۳a^{۲}b+۳ab^{۲}+b^{۳}$<br>$(a-b)^{۳}=a^{۳}-۳a^{۲}b+۳ab^{۲}-b^{۳}$ | مکعب دو جمله‌ای |
| — | $(a+b+c)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۲ab+۲ac+۲bc$ | مربع ۳ جمله‌ای |
| $x^{۶}-۱=(x^{۳}-۱)(x^{۳}+۱)$ | $(a-b)(a+b)=a^{۲}-b^{۲}$ | مزدوج |
| $x^{۲}+۳x-۴=(x+۴)(x-۱)$ | $(x+a)(x+b)=x^{۲}+(a+b)x+ab$<br>$(x+a)(x-b)=x^{۲}+(a-b)x-ab$ | جمله مشترک |
| $x^{۳}-۸=(x-۲)(x^{۲}+۲x+۴)$ | $a^{۳}+b^{۳}=(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})$<br>$a^{۳}-b^{۳}=(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})$ | چاق و لاغر |

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** در سمت راست معادله، از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم:

$$۱+\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۲}=(۱-\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۲^{۲}})\times\frac{(۱+\sqrt[۳]{۲})}{(۱+\sqrt[۳]{۲})}=\frac{۱+۲}{۱+\sqrt[۳]{۲}}=\frac{۳}{۱+\sqrt[۳]{۲}}$$

**گام دوم:** پس معادله به صورت مقابل می‌شود:

$$\frac{۳}{x+۱}=\frac{۳}{۱+\sqrt[۳]{۲}}$$

که نتیجه می‌گیریم $x=\sqrt[۳]{۲}$ است.

**گام سوم:** جواب معادله $x=\alpha=\sqrt[۳]{۲}$ می‌شود. حاصل $\alpha^{۳}+\frac{۱}{\alpha^{۳}}$ برابر است با:

$$\alpha^{۳}+\frac{۱}{\alpha^{۳}}=(\sqrt[۳]{۲})^{۳}+\frac{۱}{(\sqrt[۳]{۲})^{۳}}=۲+\frac{۱}{۲}=۲/۵$$

## تست و پاسخ ۲

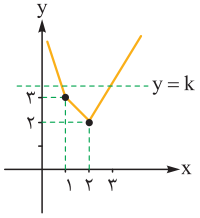
مجموع ریشه‌های معادلهٔ $|x-۲|+۳|=|۲x-۲|$ برابر ۳/۶ است، مقدار k کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۲/۲۵

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**خودت حل کنی بهتره** به کمک رسم نمودار مربوط به سمت چپ معادله، در مورد ریشه‌ها بحث کنید.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا نمودار تابع $f(x)=|2x-2|+3|x-2|$ را به کمک ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها، رسم می‌کنیم.




$$2x-2=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1)=3$$
$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow f(2)=2$$

**گام دوم:** از آن‌جایی که در صورت سؤال، مجموع ریشه‌های معادله را گفته است، خط $y=k$ حتماً نمودار را در ۲ نقطه قطع می‌کند، پس $k>2$ است.
از طرفی اگر خط $y=k$ را با نمودار تابع $f$ قطع دهیم، یکی از ریشه‌ها حتماً در بازهٔ $(2,+\infty)$ قرار می‌گیرد. پس برای $x>2$ داریم:

$$x>2: f(x)=2x-2+3(x-2)=5x-8=k \Rightarrow x=\frac{8+k}{5}$$

**گام سوم:** برای ریشهٔ دیگر، ۲ حالت را بحث می‌کنیم:

۱) $x<1: -(2x-2)-3(x-2)=-5x+8=k \Rightarrow x=\frac{8-k}{5}$

در این صورت جمع ریشه‌ها برابر است با:

$$\frac{8+k}{5}+\frac{8-k}{5}=\frac{16}{5}\neq 3/6$$

پس این حالت قابل قبول نیست.

۲) $1<x<2: (2x-2)-3(x-2)=-x+4=k \Rightarrow x=4-k$

در این حالت، مجموع ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\frac{8+k}{5}+4-k=\frac{8+k+20-5k}{5}=\frac{28-4k}{5}=3/6 \Rightarrow 4k=28-18=10 \Rightarrow k=\frac{10}{4}=2/5$$

بنابراین به ازای $k=2/5$، مجموع ریشه‌های معادلهٔ داده‌شده، برابر با $3/6$ می‌شود.

## تست و پاسخ ۳

**برای مجموعه‌های $A=\{a+1,5,b-1,c^2\}$ و $B=\{4,0,2d+1\}$، فرض کنید $A\times B\subseteq B\times A$ است. اگر $c>0$، مجموع مقادیر مختلف abcd کدام است؟**

۱) $40+16\sqrt{5}$ ۲) $-20-4\sqrt{5}$ ۳) $40-16\sqrt{5}$ ۴) $8-4\sqrt{5}$

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**خودت حل کنی بهتره** از خاصیت زیرمجموعه‌ها و خصوصیات دو مجموعهٔ مساوی استفاده کن.

**پاسخ تشریحی**

**گام اول:**

$$A\times B\subseteq B\times A \Rightarrow A\subseteq B, B\subseteq A \Rightarrow A=B$$

بنابراین تعداد اعضای دو مجموعهٔ $A$ و $B$ با هم برابر است.

**گام دوم:**

$$5\in A \Rightarrow 5\in B \Rightarrow 2d+1=5 \Rightarrow d=2$$
$$A=B=\{4,0,5\}$$

پس

**گام سوم:** چون $c>0$ بنابراین دو حالت برای $c^2$ داریم:

$$c^2=4 \xrightarrow{c>0} c=2$$

حالت اول:

حال بین $a+1$ و $b-1$ یکی حتماً برابر صفر است و دیگری می‌تواند ۰ یا ۴ یا ۵ باشد، پس داریم:

$$\begin{cases}a+1=0\\b-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}\Rightarrow abcd=-4 \quad , \quad \begin{cases}b-1=0\\a+1=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=1\\a=3\end{cases}\Rightarrow abcd=12$$

$$\begin{cases}a+1=0\\b-1=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=5\end{cases}\Rightarrow abcd=-20 \quad , \quad \begin{cases}b-1=0\\a+1=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=1\\a=4\end{cases}\Rightarrow abcd=16$$

$$\begin{cases}a+1=0\\b-1=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=6\end{cases}\Rightarrow abcd=-24$$

حالت دوم:

بین $b-1$ و $a+1$ یکی حتماً برابر صفر و دیگری برابر ۴ است، پس داریم:

$$\begin{cases} a+1=4 \\ b-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow abcd=6\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} a+1=0 \\ b-1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow abcd=-10\sqrt{5}$$

$$c^2=5 \xrightarrow{c>0} c=\sqrt{5}$$

**گام چهارم:**

بنابراین مجموع مقادیر مختلف abcd برابر است با:

$$-4-20-24+12+16+6\sqrt{5}-10\sqrt{5}=-20-4\sqrt{5}$$

## تست و پاسخ ۴

**کدام گزاره می‌تواند هم‌ارزی منطقی با گزارهٔ S داشته باشد؟**

۱) $[(q \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow (\sim q \wedge (\sim p \vee r))] \Rightarrow (p \wedge q)$

۲) $[(p \vee \sim r) \Rightarrow ((q \wedge r) \Rightarrow (q \vee r))] \Rightarrow (\sim (q \wedge p) \vee r)$

۳) $[p \Rightarrow ((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r))] \Rightarrow (\sim (p \vee r) \wedge q)$

۴) $[(r \wedge (\sim p \vee q)) \Rightarrow (p \vee q)] \Rightarrow [(\sim q \wedge r) \Rightarrow p]$

| p | q | r | S |
|---|---|---|---|
| T | T | T | F |
| T | T | F | T |
| T | F | T | T |
| T | F | F | F |
| F | T | T | F |
| F | T | F | T |
| F | F | T | F |
| F | F | F | F |

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**خودت حل کنی بهتره** از جدول ارزش گزاره‌ها کمک بگیر.

**نکته**

$$\begin{cases} \text{ابر} \rightarrow T \equiv T \\ F \rightarrow \text{ابر} \equiv T \end{cases}$$

**پاسخ تشریحی**

۳

| p | q | r | S | $(q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r)$ | $p \Rightarrow ((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r))$ | $\sim (p \vee r) \wedge q$ | گزارهٔ گزینهٔ ۳ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | T | T | F | F |
| T | T | F | T | F | F | F | T |
| T | F | T | T | F | F | F | T |
| T | F | F | F | T | T | F | F |
| F | T | T | F | T | T | F | F |
| F | T | F | T | F | T | T | T |
| F | F | T | F | F | T | F | F |
| F | F | F | F | T | T | F | F |

بررسی سایر گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱

| p | q | r | S | $q \Rightarrow (p \vee r)$ | $\sim q \wedge (\sim p \vee r)$ | $(q \Rightarrow p \vee r)) \Rightarrow (\sim q \wedge (\sim p \vee r))$ | گزارهٔ گزینهٔ ۱ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | T | F | F | T |

نیازی به ادامه نیست، این گزاره با S هم‌ارز نیست.

۲

| p | q | r | S | $\overbrace{(q\wedge r)\Rightarrow(q\vee r)}^{m}$ | $(p\vee\sim r)\Rightarrow(m)$ | $\sim(q\wedge p)\vee r$ | گزارهٔ گزینهٔ ۲ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | T | T | T | T |

این گزینه نیز با گزارهٔ S هم ارز منطقی نیست.

۴

| p | q | r | S | $(r\wedge(\sim p\vee q))\Rightarrow(p\vee q)$ | $(\sim q\wedge r)\Rightarrow p$ | گزارهٔ گزینهٔ ۴ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | T | T | T |

گزارهٔ S با گزارهٔ ۴ نیز هم‌ارز منطقی نیست.

## تست و پاسخ ۵

**اگر $\alpha$ و $\beta^{۲}$ ریشه‌های معادلهٔ $۴x^{۲}+mx-۱=۰$ و $\alpha^{۲}$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^{۲}+nx+۱=۰$ باشند، حاصل $\alpha m+\beta n$ کدام است؟**

۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) $\frac{۷}{۲}$ ۳) $-\frac{۷}{۲}$ ۴) $-\frac{۹}{۲}$

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**مشاوره** *یکی از سؤالات پای ثابت کنکور، روابط بین ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم است که با حل سؤالات کنکور می‌توانید به تسلط کافی در این مبحث برسید. دو فرمول اصلی S و P را فراموش نکنید!*

**خودت حل کنی بهتره** از فرمول ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲، $\alpha$ و $\beta$ را پیدا کنید.

**درس‌نامه** روابط بین ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم با ضرایب آن

| $y=ax^{۲}+bx+c=۰$ ($\Delta\geq۰$, با ریشه‌های $\beta,\alpha$) | | | |
|---|---|---|---|
| ۱ | $S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ | ۲ | $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$ |
| ۳ | $\alpha^{۲}+\beta^{۲}=S^{۲}-۲P$ | ۴ | $\alpha^{۳}+\beta^{۳}=S^{۳}-۳PS$ |
| ۵ | $\lvert\alpha-\beta\rvert=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$ | ۶ | $a\alpha^{۲}+b\alpha+c=۰$<br>$a\beta^{۲}+b\beta+c=۰$ |

**نکته** گاهی ممکن است در حل برخی از سؤالات این مبحث، از خاصیت ۶ استفاده کنید که در واقع همان جای‌گذاری ریشه‌ها در معادلهٔ اصلی است.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** از فرمول ضرب ریشه‌ها در معادلات درجه‌دوم استفاده می‌کنیم تا هر یک از مقادیر $\alpha$ و $\beta$ را به دست بیاوریم:

$$\begin{cases} ۴x^{۲}+mx-۱=۰ \xrightarrow{\text{ریشه‌ها: }\alpha\text{ و }\beta^{۲}} \alpha\beta^{۲}=\frac{-۱}{۴} \quad (*) \\ ۲x^{۲}+nx+۱=۰ \xrightarrow{\text{ریشه‌ها: }\beta\text{ و }\alpha^{۲}} \alpha^{۲}\beta=\frac{۱}{۲} \quad (**) \end{cases} \xrightarrow[\text{در هم ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین معادله‌ها را}} \alpha^{۳}\beta^{۳}=\frac{-۱}{۸}\Rightarrow\alpha\beta=-\frac{۱}{۲}$$

**گام دوم:** حالا عبارت $\alpha\beta=\frac{-۱}{۲}$ را در هر یک از (*) و (**) جای‌گذاری می‌کنیم تا $\alpha$ و $\beta$ به دست بیاید:

$$\alpha\beta^{۲}=\frac{-۱}{۴}\Rightarrow\beta=\frac{\frac{-۱}{۴}}{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}$$

$$\alpha^{۲}\beta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\alpha=\frac{\frac{۱}{۲}}{-\frac{۱}{۲}}=-۱$$

**گام سوم:** حالا از فرمول جمع ریشه‌ها در معادلات درجه‌دوم استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۴x^۲+mx-۱=۰ \Rightarrow \alpha+\beta^۲=-\frac{m}{۴} \xrightarrow{\text{از گام دوم}} -۱+\frac{۱}{۴}=-\frac{m}{۴} \Rightarrow m=۳ \\ ۲x^۲+nx+۱=۰ \Rightarrow \alpha^۲+\beta=\frac{-n}{۲} \xrightarrow{\text{از گام دوم}} ۱+\frac{۱}{۲}=\frac{-n}{۲} \Rightarrow n=-۳ \end{cases}$$

**گام چهارم:** حاصل عبارت خواسته‌شده، برابر می‌شود با:

$$\alpha m+\beta n=-۱\times ۳+\frac{۱}{۲}(-۳)=-۳-\frac{۳}{۲}=-\frac{۹}{۲}$$

## تست و پاسخ ۶

**نمودار تابع $f(x)=۲x-x^۲$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کرده و سه واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم. ضابطهٔ وارون تابع جدید در بزرگ‌ترین بازه‌ای که اکیداً نزولی است، کدام است؟**

$-f(-x)$

۱) $y=۲-\sqrt{x-۱}$ ۲) $y=۱-\sqrt{x-۲}$ ۳) $y=۱-\sqrt{x+۲}$ ۴) $y=۲-\sqrt{x+۱}$

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**درس‌نامه** انتقال، قرینه‌یابی، انبساط و انقباض

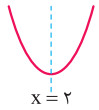
| | نمودار چه می‌شود؟ | نماد ریاضی | اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد |
|---|---|---|---|
| انتقال | a واحد راست | $f(x-a)$ | جای xها، $x-a$ می‌گذاریم. |
| | a واحد چپ | $f(x+a)$ | جای xها، $x+a$ می‌گذاریم. |
| | b واحد بالا | $f(x)+b$ | bتا به ضابطه اضافه می‌کنیم. |
| | b واحد پایین | $f(x)-b$ | bتا از ضابطه کم می‌کنیم. |
| قرینه‌یابی | نسبت به محور xها | $-f(x)$ | جای y، $-y$ می‌گذاریم. |
| | نسبت به محور yها | $f(-x)$ | جای xها، $-x$ می‌گذاریم. |
| | نسبت به مبدأ | $-f(-x)$ | هر دو کار بالا با هم! |
| | نسبت به خط $x=k$ | $f(۲k-x)$ | جای xها، $۲k-x$ می‌گذاریم. |
| | نسبت به خط $y=k$ | $۲k-f(x)$ | به جای yها، $۲k-y$ می‌گذاریم. |
| انبساط و انقباض افقی | انبساط با ضریب ۲ | $f(\frac{x}{۲})$ | جای xها، $\frac{x}{۲}$ می‌گذاریم. |
| | انقباض با ضریب $\frac{۱}{۲}$ | $f(۲x)$ | جای xها، $۲x$ می‌گذاریم. |
| انبساط و انقباض عمودی | انبساط با ضریب ۲ | $۲f(x)$ | کل ضابطه ضربدر ۲ می‌شود. |
| | انقباض با ضریب $\frac{۱}{۲}$ | $\frac{۱}{۲}f(x)$ | کل ضابطه ضربدر $\frac{۱}{۲}$ می‌شود. |

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا تابع f را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم:

$$f(x)=۲x-x^۲ \xrightarrow{g_۱(x)=-f(-x)} g_۱(x)=-(-۲x-x^۲)=۲x+x^۲$$

**گام دوم:** حالا $g_۱(x)$ را ۳ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم، یعنی به جای xها، $x-۳$ می‌گذاریم:

$$g_۲(x)=g_۱(x-۳)=۲(x-۳)+(x-۳)^۲=۲x-۶+x^۲-۶x+۹=x^۲-۴x+۳=(x-۲)^۲-۱$$

**گام سوم:** در تابع $g_۲(x)$ به‌دست‌آمده، محور تقارن $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{۴}{۲}=۲$ است و تابع، مینیمم دارد، پس شکل تابع به صورت 

است و در بازهٔ $(-\infty,۲]$، نزولی اکید است. در این بازه، وارون آن را پیدا می‌کنیم.

$$y=(x-۲)^۲-۱\Rightarrow y+۱=(x-۲)^۲\Rightarrow \sqrt{y+۱}=|x-۲|$$

$$\xrightarrow{x\le ۲}\sqrt{y+۱}=-x+۲\Rightarrow x=۲-\sqrt{y+۱}\xrightarrow[\text{عوض می‌کنیم.}]{\text{جای x و y را}} g_۲^{-۱}(x)=۲-\sqrt{x+۱}$$

## تست و پاسخ ۷

**نقاط $A(۴,۳)$، $B(-۴,۹)$ و مبدأ مختصات سه رأس مثلثی هستند؛ کم‌ترین ارتفاع مثلث برابر کدام است؟**

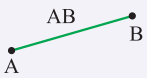
۱) ۳/۶ ۲) ۲/۴ ۳) ۴/۸ ۴) ۱/۸

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**مشاوره** در حل سؤالات هندسهٔ تحلیلی، از رسم شکل‌های فرضی برای بهتر فهمیدن مسئله، کمک بگیرید. معمولاً سؤالات مربوط به هندسهٔ تحلیلی همانند این سؤال ساده هستند.

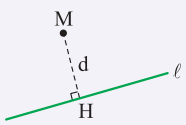
**خودت حل کنی بهتره** کم‌ترین ارتفاع مثلث، بر بزرگ‌ترین ضلع مثلث عمود می‌شود.

**نکات** ۱) فاصلهٔ بین دو نقطه در صفحه:



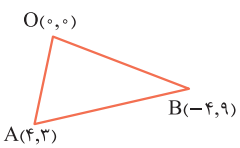

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$$

۲) فاصلهٔ نقطهٔ $M(x_M,y_M)$ از خط $ax+by+c=۰$:




$$d=MH=\frac{|ax_M+by_M+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

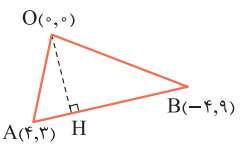
**پاسخ تشریحی** **گام اول:** مثلث فرضی زیر را در نظر بگیرید. طول اضلاع مثلث را پیدا می‌کنیم:




$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(۴+۴)^۲+(۳-۹)^۲}=\sqrt{۶۴+۳۶}=۱۰$$

$$AO=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

$$BO=\sqrt{(-۴)^۲+۹^۲}=\sqrt{۱۶+۸۱}=\sqrt{۹۷}$$




پس AB بیشترین طول را در بین اضلاع مثلث ABO دارد. بنابراین ارتفاع وارد بر AB که آن را با OH نمایش می‌دهیم، کم‌ترین طول را خواهد داشت:

**گام دوم:** برای پیداکردن طول OH، ابتدا معادلهٔ خط AB را می‌نویسیم و سپس از فرمول فاصلهٔ نقطه از خط استفاده می‌کنیم.

$$y-y_A=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}(x-x_A)\Rightarrow y-۳=\frac{۳-۹}{۴+۴}(x-۴)\Rightarrow y-۳=\frac{-۳}{۴}x+۳\Rightarrow \frac{۳}{۴}x+y-۶=۰$$

$$OH=\frac{\left|\frac{۳}{۴}\times ۰+۰-۶\right|}{\sqrt{(\frac{۳}{۴})^۲+۱^۲}}=\frac{۶}{\frac{۵}{۴}}=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸$$

## تست و پاسخ ۸

**فرض کنید تابع f خطی و اکیداً نزولی و $f^{-1}(1-2x)=1-2f(x)$ باشد. اگر $gof(x)=9x^2+3x$ باشد، ضابطهٔ $g(x)$ کدام است؟**

ضریب x در تابع خطی منفی است.

۱) $9x^2-15x+6$
۲) $9x^2+15x+6$
۳) $9x^2-15x-6$
۴) $9x^2+15x-6$

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**نکات** ۱) در تابع اکیداً نزولی f، به ازای $x_1<x_2$ رابطهٔ $f(x_1)>f(x_2)$ برقرار است.

۲) اگر تابع خطی f، نزولی اکید باشد، شیب آن منفی است و اگر صعودی اکید باشد، شیب آن مثبت خواهد بود.

۳) اگر در تابع وارون‌پذیر f، $(a,b)$ روی تابع f قرار داشته باشد، نقطهٔ $(b,a)$ روی تابع $f^{-1}$ قرار دارد.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** تابع f خطی و اکیداً نزولی است، پس می‌توانیم آن را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر بگیریم. به طوری که $a<0$ باشد. در این صورت $f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$ می‌شود.

**گام دوم:** تابع f و $f^{-1}$ را در عبارت داده‌شده، جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f^{-1}(1-2x)=1-2f(x) \Rightarrow \frac{1-2x-b}{a}=1-2(ax+b)\Rightarrow 1-2x-b=a-2a^2x-2ab$$

$$\Rightarrow -2x+(1-b)=-2a^2x+(a-2ab)$$

**گام سوم:** با توجه به این‌که تساوی گفته‌شده، اتحاد است، باید ضرایب x و ضرایب ثابت در دو طرف با هم برابر باشند:

$$x^1: -2=-2a^2 \Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm 1 \xrightarrow{a<0} a=-1 \quad (*)$$

$$x^0: 1-b=a-2ab \xrightarrow{(*)} 1-b=-1+2b\Rightarrow 3b=2\Rightarrow b=\frac{2}{3}$$

**گام چهارم:** پس $f(x)=-x+\frac{2}{3}$ است. از طرفی تابع gof داده شده است. با جای‌گذاری ضابطهٔ f در آن داریم:

$$gof(x)=g\big(f(x)\big)=g(-x+\tfrac{2}{3})=9x^2+3x$$

از تغییر متغیر $-x+\frac{2}{3}=t$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $x=\frac{2}{3}-t$ می‌شود:

$$g(t)=9(\tfrac{2}{3}-t)^2+3(\tfrac{2}{3}-t)=9(\tfrac{4}{9}-\tfrac{4}{3}t+t^2)+2-3t=4-12t+9t^2+2-3t=9t^2-15t+6$$

بنابراین ۱ درست است.

## تست و پاسخ ۹

**دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\log_2(\frac{x}{\log_{\frac{1}{2}}2x})$ کدام است؟**

۱) $(0,2)$
۲) $(0,1)$
۳) $(\frac{1}{2},1)$
۴) $(0,\frac{1}{2})$

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**درس‌نامه** دامنهٔ توابع لگاریتمی

در تابع لگاریتمی $y=\log_a x$ که در آن $a\neq 1$ و $a>0$ است، بایستی $x>0$ باشد. بنابراین در تعیین دامنهٔ تابع، بین ۳ عبارت مقابل، اشتراک می‌گیریم:

$$\begin{cases} x>0 \\ a>0 \\ a\neq 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \text{دامنهٔ تابع}$$

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** در تابع $y=\log_a x$ دامنهٔ تابع به صورت $x>0$ است. بنابراین برای تابع داده‌شده داریم:

$$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{\log_{\frac{1}{2}} 2x}\right) \Rightarrow \begin{cases} 1)\ \log_{\frac{1}{2}} 2x : 2x>0 \Rightarrow x>0 \ (*) \\ 2)\ \dfrac{x}{\log_{\frac{1}{2}} 2x}>0 \Rightarrow \end{cases}$$

با توجه به $(*)$، صورت این کسر مثبت است، پس باید مخرج کسر هم مثبت باشد تا کل عبارت، مثبت شود:

$$\log_{\frac{1}{2}} 2x>0 \Rightarrow -\log_2 2x>0 \Rightarrow -(\log_2 2+\log_2 x)>0 \Rightarrow 1+\log_2 x<0$$

$$\Rightarrow \log_2 x<-1=\log_2 2^{-1} \Rightarrow x<\frac{1}{2} \ (**)$$

**گام دوم:** با اشتراک $(*)$ و $(**)$، دامنهٔ تابع به صورت $(0,\frac{1}{2})$ به دست می‌آید.

## تست و پاسخ ۱۰

**اگر معادلهٔ $(\log_4 4x)(\log_8 \frac{x}{4})=\frac{7}{2}$ دارای ریشه‌های $\alpha$ و $\beta$ باشد، مقدار $\log_{32}\frac{\alpha}{\beta}$ کدام می‌تواند باشد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

### درس‌نامه ●● ویژگی‌های لگاریتم

| ویژگی | توضیح |
|---|---|
| $y=a^x \Leftrightarrow \log_a y=x$ | رابطه‌های لگاریتمی را می‌توانیم به صورت توانی بنویسیم و برعکس. |
| $y=\log_b a \xrightarrow{D} \begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ b\neq 1 \end{cases}$ | برای تعیین دامنهٔ توابع لگاریتمی بین سه شرط اشتراک می‌گیریم. |
| $\log_b 1=0, \log_a a=1$ | لگاریتم ۱ در هر پایه‌ای صفر است و لگاریتم هر عدد در پایهٔ خودش برابر یک می‌شود. |
| $\log_b a^n=n\log_b a$ | توان عبارت جلوی لگاریتم به پشت لگاریتم می‌رود. $(a>0)$ |
| $\log_{b^n} a=\frac{1}{n}\log_b a$ | توان پایهٔ لگاریتم، معکوس شده و به پشت لگاریتم می‌رود. |
| $\log_c ab=\log_c a+\log_c b$ | لگاریتم ضرب دو عدد تبدیل به جمع لگاریتم‌ها می‌شود. |
| $\log_c \frac{a}{b}=\log_c a-\log_c b$ | لگاریتم تقسیم دو عدد تبدیل به تفاضل لگاریتم‌ها می‌شود. |
| $\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$ | ویژگی تغییر پایه (قانون تغییر مبنا) |
| $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$ | اگر جای $a$ و $b$ عوض شود، حاصل معکوس می‌شود. مثلاً $\log_3 2$ و $\log_2 3$ معکوس هم هستند. |

**حل معادلات لگاریتمی**

برای حل معادلات لگاریتمی، با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم به یکی از دو حالت مقابل می‌رسیم:

الف) $\log_a \square=\log_a \bigcirc \Rightarrow \square=\bigcirc$

ب) $\log_a \square=b \Rightarrow \square=a^b$

$x$ را به دست می‌آوریم. جواب‌هایی قبول هستند که در دامنهٔ تمام لگاریتم‌ها قرار داشته باشند.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** لگاریتم‌ها را ساده می‌کنیم، ابتدا آن‌ها را به مبنای ۲ تبدیل می‌کنیم:

$$(\log_{۸}\frac{x}{۴})(\log_{۴}۴x)=\frac{۷}{۲}\Rightarrow(\log_{۲^۳}\frac{x}{۴})(\log_{۲^۲}۴x)=\frac{۷}{۲}\Rightarrow(\frac{۱}{۳}\log_{۲}\frac{x}{۴})(\frac{۱}{۲}\log_{۲}۴x)=\frac{۷}{۲}$$

$$\Rightarrow(\log_{۲}\frac{x}{۴})(\log_{۲}۴x)=۲۱\Rightarrow(\log_{۲}x-\log_{۲}۴)(\log_{۲}x+\log_{۲}۴)=۲۱$$

$$\Rightarrow(\log_{۲}x-۲)(\log_{۲}x+۲)=۲۱\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}(\log_{۲}x)^۲-۴=۲۱\Rightarrow(\log_{۲}x)^۲=۲۵\ (*)$$

**گام دوم:** حالا برای معادلهٔ (*) دو حالت داریم:

$$۱)\ \log_{۲}x=۵\Rightarrow x=۲^۵=۳۲$$

$$۲)\ \log_{۲}x=-۵\Rightarrow x=۲^{-۵}=\frac{۱}{۳۲}$$

**گام سوم:** پس $\frac{\alpha}{\beta}$ می‌تواند یکی از مقادیر $۲^{۱۰}$ یا $۲^{-۱۰}$ باشد. در این صورت داریم:

$$\frac{\alpha}{\beta}=۲^{۱۰}\Rightarrow\log_{۳۲}\frac{\alpha}{\beta}=\log_{۲^۵}۲^{۱۰}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=۲^{-۱۰}\Rightarrow\log_{۳۲}\frac{\alpha}{\beta}=\log_{۲^۵}۲^{-۱۰}=\frac{-۱۰}{۵}=-۲$$

که با توجه به گزینه‌ها، مقدار خواسته‌شده برابر با ۲ می‌تواند باشد.

## تست و پاسخ ۱۱

**اگر $\sqrt{۲\sin x+\cos x}+\sqrt{\sin x+۲\cos x}=۲$ باشد، مقدار $\sin(x+\frac{\pi}{۴})$ کدام است؟**

۱) $۶\sqrt{۲}-۹$ ۲) $۸-۶\sqrt{۲}$ ۳) $۶\sqrt{۲}-۸$ ۴) $۹-۶\sqrt{۲}$

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**خودت حل کنی بهتره** طرفین معادله را به توان ۲ برسانید و از تغییر متغیر و اتحادهای مثلثاتی استفاده کنید.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** طرفین معادلهٔ داده‌شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{۲\sin x+\cos x}+\sqrt{\sin x+۲\cos x}=۲$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}}۲\sin x+\cos x+\sin x+۲\cos x+۲\sqrt{(۲\sin x+\cos x)(\sin x+۲\cos x)}=۴$$

$$\Rightarrow۳\sin x+۳\cos x+۲\sqrt{۲\sin^۲x+۴\sin x\cos x+\sin x\cos x+۲\cos^۲x}=۴$$

$$\Rightarrow۳(\sin x+\cos x)+۲\sqrt{۲+۵\sin x\cos x}=۴\ (*)$$

**گام دوم:** از تغییر متغیر $\sin x+\cos x=t$ استفاده می‌کنیم:

$$(\sin x+\cos x)^۲=t^۲\Rightarrow۱+۲\sin x\cos x=t^۲\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{t^۲-۱}{۲}$$

**گام سوم:** با جای‌گذاری تغییر متغیری که داده‌ایم در معادلهٔ (*)، داریم:

$$۳t+۲\sqrt{۲+۵(\frac{t^۲-۱}{۲})}=۴\Rightarrow۲\sqrt{\frac{۴+۵t^۲-۵}{۲}}=۴-۳t$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}}۴(\frac{۵t^۲-۱}{۲})=۱۶-۲۴t+۹t^۲\Rightarrow۱۰t^۲-۲=۱۶-۲۴t+۹t^۲$$

$$t^۲+۲۴t-۱۸=۰\Rightarrow\Delta=(۲۴)^۲+۴\times۱۸=۴\times۱۶۲\Rightarrow t=\frac{-۲۴\pm۲\sqrt{۱۶۲}}{۲}=-۱۲\pm\sqrt{۱۶۲}=-۱۲\pm۹\sqrt{۲}$$

**گام چهارم:** عبارت $\sin x+\cos x=t$ می‌تواند حداکثر و حداقل مقدار زیر را بگیرد:

$$(\sin x+\cos x)^۲=۱+\sin۲x\Rightarrow-۱\le\sin۲x\le۱\Rightarrow۰\le۱+\sin۲x\le۲$$

$$\Rightarrow۰\le(\sin x+\cos x)^۲\le۲\Rightarrow-\sqrt{۲}\le\sin x+\cos x\le\sqrt{۲}$$

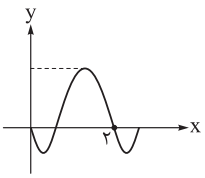
بنابراین مقدار $t=-۱۲+۹\sqrt{۲}$ قابل قبول است. داریم:

$$t=\sin x+\cos x=-۱۲+۹\sqrt{۲}\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴})=\sin x\cos\frac{\pi}{۴}+\sin\frac{\pi}{۴}\cos x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\sin x+\cos x)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}t=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(-۱۲+۹\sqrt{۲})=-۶\sqrt{۲}+۹$$

## تست و پاسخ ۱۲

**قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a-۴\cos(bx-\frac{\pi}{۳})$ به صورت زیر است. با کدام تبدیل‌های زیر روی نمودار f، تابع جدید در مبدأ بر محور xها مماس می‌شود؟**




۱) $\frac{۲}{۳}$ واحد انتقال به راست و ۶ واحد انتقال به پایین

۲) $\frac{۴}{۳}$ واحد انتقال به چپ و ۲ واحد انتقال به بالا

۳) $\frac{۴}{۳}$ واحد انتقال به چپ و ۶ واحد انتقال به بالا

۴) $\frac{۲}{۳}$ واحد انتقال به چپ و ۲ واحد انتقال به بالا

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**درس‌نامه** به دست آوردن ضرایب مجهول در توابع به فرم $y=a\sin(bx)+c$ یا $y=a\cos(bx)+c$

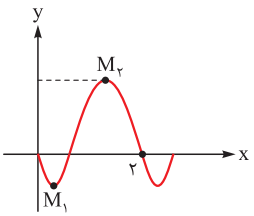
| گام | چیکار می‌کنیم؟ | توضیح |
|---|---|---|
| ۱ | ساده‌کردن | اگر ضابطه ساده می‌شد، حتماً ساده می‌کنیم. مثلاً جای $۴\sin(\frac{\pi}{۲}-x)$ می‌نویسیم $۴\cos x$. |
| ۲ | دورهٔ تناوب | اگر از روی شکل دورهٔ تناوب معلوم بود، $\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}$ را با آن برابر قرار می‌دهیم تا b به دست آید. |
| ۳ | max و min | اگر مقدار min و max روی نمودار معلوم بود، از معادلات $max=\lvert a\rvert+c$ و $min=-\lvert a\rvert+c$، مقدار $\lvert a\rvert$ و c را حساب می‌کنیم. |
| ۴ | نقطهٔ کمکی | اگر مختصات نقطه‌ای از نمودار معلوم بود، آن را در ضابطه جای‌گذاری می‌کنیم تا یک معادله به ما بدهد. |

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** مختصات $(۰,۰)$ در ضابطهٔ تابع فوق صدق می‌کند، پس داریم: $f(۰)=a-۴\cos(\frac{-\pi}{۳})=۰\Rightarrow a=۴\times\frac{۱}{۲}=۲$

**گام دوم:** از طرفی از روی نمودار مشخص است که دورهٔ تناوب تابع، برابر با $T=۲$ است. پس: $T=۲=\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}\Rightarrow \lvert b\rvert=\pi$

از آن‌جایی که شروع نمودار، نزولی است، مشتق تابع در $x=۰$ باید مقداری منفی باشد که اگر مشتق را محاسبه کنید، شرط $b>۰$ برقرار است. پس: $b=\pi$ قابل قبول است.

**گام سوم:** $f(x)=۲-۴\cos(\pi x-\frac{\pi}{۳})$ می‌شود. در نمودار تابع f، باید مختصات نقطهٔ $M_۱$ و $M_۲$ را پیدا کنیم تا با انتقال این نقطه‌ها به مبدأ مختصات، تابع جدید در مبدأ بر محور xها مماس شود:




نقطهٔ $M_۱$، نقطهٔ مینیمم تابع است. پس:

$$f(x)=۲-۴\cos(\pi x-\frac{\pi}{۳})\xrightarrow{\cos(\pi x-\frac{\pi}{۳})=-۱} y_{M_۱}=۲-۴=-۲$$

$$\cos(\pi x-\frac{\pi}{۳})=-۱=\cos(۲k\pi)\Rightarrow \pi x-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi\Rightarrow x=۲k+\frac{۱}{۳}\Rightarrow x_{M_۱}=\frac{۱}{۳}$$

پس $M_۱(\frac{۱}{۳},-۲)$ است که با انتقال نمودار به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ به سمت چپ و ۲ واحد به بالا، نمودار مد نظر، به دست می‌آید.

با توجه به گزینه‌ها، این مورد را نداریم. پس به سراغ نقطهٔ $M_۲$ می‌رویم.

**گام چهارم:** نقطهٔ $M_2$، max تابع است پس:

$$f(x)=2-4\cos(\pi x-\frac{\pi}{3})\xrightarrow{\cos(x\pi-\frac{\pi}{3})=-1} y_{M_2}=2+4=6$$

$$\cos(\pi x-\frac{\pi}{3})=-1=\cos(2k\pi+\pi)\Rightarrow \pi x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi\Rightarrow x=2k+\frac{4}{3}\Rightarrow x_{M_2}=\frac{4}{3}$$

پس $M_2(\frac{4}{3},6)$ است که با انتقال نمودار به اندازهٔ $\frac{4}{3}$ به سمت چپ و ۶ واحد به بالا، نمودار مد نظر به دست می‌آید.

## تست و پاسخ ۱۳

**اگر $\alpha$ و $\beta$ دو ریشهٔ متوالی معادلهٔ $4\sin^2 x-\tan x=0$ باشند، حاصل $\beta-\alpha$ کدام نمی‌تواند باشد؟**

۱) $\frac{\pi}{12}$ ۲) $\frac{4\pi}{12}$ ۳) $\frac{5\pi}{12}$ ۴) $\frac{7\pi}{12}$

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**خودت حل کنی بهتره** چون مقدار اختلاف ریشه‌های متوالی خواسته شده است، ریشه‌های معادله را در یک بازه با دورهٔ $2\pi$ به دست بیاورید.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** چون اختلاف دو ریشهٔ متوالی خواسته شده، معادله را در بازهٔ $[0,2\pi)$ حل می‌کنیم. داریم:

$$4\sin^2 x-\tan x=0\Rightarrow 4\sin^2 x-\frac{\sin x}{\cos x}=0\Rightarrow\frac{4\sin^2 x\cos x-\sin x}{\cos x}=0$$

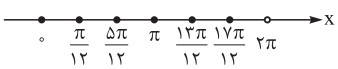
$$\xrightarrow{\cos x\neq 0}\sin x(4\sin x\cos x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}1)\ \sin x=0\Rightarrow x=0,\pi\\ 2)\ 4\sin x\cos x-1=0\end{cases}$$

**گام دوم:** برای معادلهٔ (۲) داریم:

$$4\sin x\cos x=1\Rightarrow 2\sin 2x=1\Rightarrow\sin 2x=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ 2x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi+\frac{\pi}{12}\Rightarrow x=\frac{\pi}{12},\frac{13\pi}{12}\\ x=k\pi+\frac{5\pi}{12}\Rightarrow x=\frac{5\pi}{12},\frac{17\pi}{12}\end{cases}$$

**گام سوم:** جواب‌های به‌دست‌آمده برای $x$ را روی محور نمایش می‌دهیم:




اختلاف ریشه‌های متوالی را به دست می‌آوریم:

$$\beta-\alpha=\frac{\pi}{12}\qquad \beta-\alpha=\frac{4\pi}{12}$$

$$\beta-\alpha=\frac{4\pi}{12}\qquad \beta-\alpha=\frac{7\pi}{12}$$

با توجه به گزینه‌ها، اختلاف ریشه‌های متوالی نمی‌تواند برابر با $\frac{5\pi}{12}$ باشد.

## تست و پاسخ ۱۴

**نمودار $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2-1 & |x|\leq 1\\ 4x+3 & |x|>1\end{cases}$ نمودار مشتق خود را در چند نقطه قطع می‌کند؟** ($f'(x)$)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** مشتق تابع $f$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)^2-1 & |x|\leq 1\\ 4x+3 & |x|>1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x+2 & |x|\leq 1\\ 4 & |x|>1\end{cases}$$

**گام دوم:** نمودار تابع $f$ و $f'$ را به ازای $|x|<1$ و $|x|>1$ قطع می‌دهیم:

$$1)\ |x|\le 1: (x+1)^2-1=2x+2 \Rightarrow x^2+2x+1-1=2x+2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

دو مقدار به‌دست‌آمده برای $x$ در بازهٔ $|x|<1$ قرار نمی‌گیرند، پس قابل قبول نیستند.

$$2)\ |x|>1: 4x+3=4 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

می‌بینیم که $x$ به‌دست‌آمده در $|x|>1$ قرار ندارد، پس قابل قبول نیست.

بنابراین تابع $f$ و مشتق آن، در هیچ نقطه‌ای یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

## تست و پاسخ ۱۵

**هرگاه $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2-2x}{f(x)+4x+1}=+\infty$ باشد، نمودار $f$ در مجاورت $x=2$ به کدام صورت می‌تواند باشد؟**

۱)

۲)

۳)

۴)

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

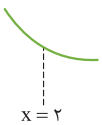
**مشاوره** پیشنهاد می‌کنم پاسخ این سؤال را به‌دقت بررسی کنید. تسلط به این سؤال یعنی اینکه با هر سؤال حد دیگری مشکلی نخواهید داشت!

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** حاصل حد بی‌نهایت شده است. پس مخرج کسر داده‌شده، به ازای $x=2$ صفر است:

$$f(x)+4x+1=0 \xrightarrow{x=2} f(2)+9=0 \Rightarrow f(2)=-9$$

**گام دوم:** در صورت کسر، $x=2$ ریشه می‌باشد، بنابراین برای این که حاصل حد بی‌نهایت شود، باید عامل $(x-2)^2$ در مخرج وجود داشته باشد. پس $f(x)+4x+1=a(x-2)^2$ است.

صورت نیز به ازای $x\to 2^-$، عبارتی منفی است. پس مخرج به ازای $x\to 2^-$، نیز باید منفی باشد، پس $a<0$ است.

**گام سوم:** تابع $f$ به صورت $f(x)=a(x-2)^2-4x-1$ با شرط $a<0$ است. پس در مجاورت $x=2$، تابع $f$ نزولی اکید است. یعنی می‌تواند در مجاورت $x=2$ به صورت یا  باشد.

## تست و پاسخ ۱۶

**اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|} & |x|>1\\ x & |x|\le 1\end{cases}$ و $g(x)=1-x^2$ باشد، توابع fog و gof به ترتیب از راست به چپ، در چند نقطه ناپیوسته است؟**

۱) ۲،۲ ۲) ۲،۰ ۳) ۰،۰ ۴) ۰،۲

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**مشاوره** از پیوستگی حتماً یک سؤال در کنکور می‌آید که با بررسی تیپ‌های سال‌های قبلی، به راحتی قابل حل شدن است.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** با توجه به توابع $f$ و $g$ داده شده، تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$f\big(g(x)\big)=f(1-x^2)=\begin{cases}\frac{1-x^2}{|1-x^2|} & |1-x^2|>1\\ 1-x^2 & |1-x^2|\le 1\end{cases}$$

برای حالت $|1-x^2|>1$، بازه‌های مربوط به $x$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}1-x^2>1\\ \text{یا}\\ 1-x^2<-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2<0 \Rightarrow \varnothing\\ \text{یا}\\ x^2>2 \Rightarrow x>\sqrt{2} \text{ یا } x<-\sqrt{2}\end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$$

برای $x$ به‌دست‌آمده، مقدار $\frac{1-x^2}{|1-x^2|}=-1$ به دست می‌آید.

برای حالت $|۱-x^۲| \le ۱$ نیز، همانند بالا، $x \in [-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}]$ به دست می‌آید. پس در نهایت خواهیم داشت:

$$f(g(x)) = \begin{cases} -۱ & |x| > \sqrt{۲} \\ ۱-x^۲ & |x| \le \sqrt{۲} \end{cases}$$

کافی است که شرط پیوستگی را در نقاط مرزی $x = \pm\sqrt{۲}$ بررسی کنیم. در این نقاط رابطهٔ $f(g(\sqrt{۲})) = \lim\limits_{x\to\sqrt{۲}^+} f(g(x)) = \lim\limits_{x\to\sqrt{۲}^-} f(g(x))$ و همچنین $f(g(-\sqrt{۲})) = \lim\limits_{x\to(-\sqrt{۲})^+} f(g(x)) = \lim\limits_{x\to(-\sqrt{۲})^-} f(g(x))$ برقرار است.

مشاهده می‌کنید که تابع fog در تمامی نقاط پیوسته است.

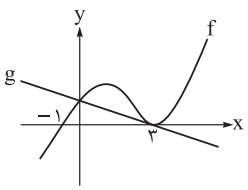
**گام دوم:** حالا تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x)) = \begin{cases} ۱-\dfrac{x^۲}{|x|^۲} & |x|>۱ \\ ۱-x^۲ & |x|\le ۱ \end{cases} = \begin{cases} ۰ & |x|>۱ \\ ۱-x^۲ & |x|\le ۱ \end{cases}$$

مشابه گام اول می‌بینیم که تابع gof هم در تمامی نقاط پیوسته است.

## تست و پاسخ ۱۷

**نمودار تابع درجه‌سوم f و خط g به صورت زیر است. اگر $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{g(x+۴)}{x+۱+f(x)} = \dfrac{-۱}{۳}$ باشد، مقدار $f(۵)$ کدام است؟**

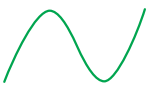
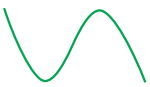
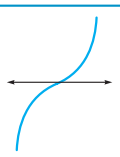
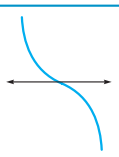
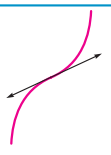
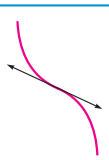



۱) $-\dfrac{۲۴}{۷}$
۲) $-\dfrac{۱}{۷}$
۳) $\dfrac{۲۴}{۷}$
۴) $-\dfrac{۶}{۷}$

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**خودت حل کنی بهتره** به کمک ریشه‌های توابع، ضابطهٔ آن‌ها را به دست بیاورید.

**درس نامه** نمودار تابع‌های درجه‌سوم $f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$

| | $a > ۰$ | $a < ۰$ | نکات |
|---|---|---|---|
| $\Delta_{f'} > ۰$ |  |  | ۱) اگر مشتق دو ریشه داشته باشد، تابع دو اکسترمم نسبی دارد.<br>۲) نقطهٔ عطف وسط دو اکسترمم قرار دارد.<br>۳) اگر $a > ۰$ اول، max و بعد min اتفاق می‌افتد (اگر $a < ۰$ بالعکس). |
| $\Delta_{f'} = ۰$ |  |  | ۱) اگر مشتق ریشهٔ مضاعف داشته باشد، تابع اکسترمم نسبی ندارد.<br>۲) خط مماس در نقطهٔ عطف افقی است.<br>۳) اگر $a > ۰$، اول تقعر رو به پایین و بعد رو به بالاست (اگر $a < ۰$ بالعکس). |
| $\Delta_{f'} < ۰$ |  |  | ۱) اگر مشتق ریشه نداشته باشد، تابع اکسترمم نسبی ندارد.<br>۲) خط مماس در نقطهٔ عطف غیرافقی است.<br>۳) اگر $a > ۰$، اول تقعر رو به پایین و بعد رو به بالاست (اگر $a < ۰$ بالعکس). |

**نکات** ۱) تابع درجه‌سوم همواره یک نقطهٔ عطف دارد که ریشهٔ $f''(x)$ است.

۲) نقطهٔ عطف از رابطهٔ $x_0 = -\frac{b}{3a}$ نیز به دست می‌آید.

۳) اگر $\Delta_{f'} \leq 0$ باشد، تابع اکسترمم نسبی ندارد.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** تابع $f$ یک ریشهٔ مضاعف در نقطهٔ $x=3$ و یک ریشهٔ ساده در $x=-1$ دارد. پس می‌توان آن را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$f(x) = a(x+1)(x-3)^2$$

**گام دوم:** از طرفی تابع $g$ هم در $x=3$ ریشه دارد، پس $g(x) = b(x-3)$ است.

**گام سوم:** دو تابع $f$ و $g$ در $x=0$ یکدیگر را قطع می‌کنند، بنابراین:

$$f(0) = g(0) \Rightarrow 9a = -3b \Rightarrow b = -3a$$

**گام چهارم:** در حد داده‌شده، توابع $f$ و $g$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -1} \frac{g(x+4)}{x+1+f(x)} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \lim_{x\to -1} \frac{-3a(x+4-3)}{(x+1)+a(x+1)(x-3)^2} = \lim_{x\to -1} \frac{-3a(x+1)}{(x+1)(1+a(x-3)^2)}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{-3a}{1+a(x-3)^2} = \frac{-3a}{1+16a} = \frac{-1}{3} \Rightarrow 9a = 1+16a \Rightarrow 7a = -1 \Rightarrow a = \frac{-1}{7}$$

**گام پنجم:** پس $f(x) = \frac{-1}{7}(x+1)(x-3)^2$ است. حالا مقدار $f(5)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(5) = \frac{-1}{7} \times 6 \times 4 = \frac{-24}{7}$$

## تست و پاسخ ۱۸

**با فرض آن‌که $f$ تابعی پیوسته باشد، $\lim_{h\to 0} \frac{f(h-1)-5}{2h} = \frac{-1}{4}$ و $g(2x) = \sqrt[3]{x} f(\frac{1}{x})$، مقدار $g'(-2)$ چه عددی است؟**

۱) $\frac{13}{6}$

۲) $\frac{5}{12}$

۳) $\frac{7}{12}$

۴) $\frac{7}{5}$

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**مشاوره** در این گونه سؤالات، استفاده از قاعدهٔ هوپیتال را فراموش نکنید.

**درس‌نامه ●● قضیهٔ هوپیتال**

فرض کنید $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ در حالت مبهم $\frac{0}{0}$ باشد.

حاصل حد $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ را به دست می‌آوریم. اگر حاصل آن $L$ باشد، حاصل حد اصلی هم $L$ است.

**درس‌نامه ●● مشتق تابع مرکب**

مشتق تابع $f(x)$ همان $f'(x)$ می‌شود، اما برای مشتق‌گیری از $f(u)$ که $u$ یک عبارت برحسب $x$ است، داریم:

$$\underbrace{\big(f(u)\big)'}_{\text{مشتق تابع مرکب}} = \underbrace{u'}_{\text{مشتق عبارت درون}} \times f'(u)$$

مثلاً:

$$\big(f(x^2+1)\big)' = 2x \times f'(x^2+1)$$

**پاسخ تشریحی**

**گام اول:** در حد $\lim_{h\to 0}\frac{f(h-1)-5}{2h}=-\frac{1}{4}$، مخرج به ازای $h=0$، صفر است و حاصل حد عددی حقیقی است. پس صورت نیز به ازای $h=0$ صفر است:

$$f(-1)-5=0\Rightarrow f(-1)=5$$

**گام دوم:** در حد داده‌شده، از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h-1)-5}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(h-1)}{2}=\frac{f'(-1)}{2}=\frac{-1}{4}\Rightarrow f'(-1)=\frac{-1}{2}$$

**گام سوم:** حالا مشتق تابع g را به دست می‌آوریم:

$$g(2x)=\sqrt[3]{x}\,f(\frac{1}{x})\Rightarrow 2g'(2x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}f(\frac{1}{x})-\frac{1}{x^2}\sqrt[3]{x}\,f'(\frac{1}{x})$$

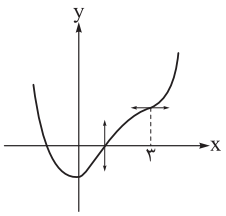
$$\xrightarrow{x=-1} 2g'(-2)=\frac{1}{3}f(-1)+1f'(-1)$$

از گام اول، مقادیر $f(-1)$ و $f'(-1)$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$2g'(-2)=\frac{5}{3}-\frac{1}{2}=\frac{7}{6}\Rightarrow g'(-2)=\frac{7}{12}$$

## تست و پاسخ ۱۹

**نمودار تابع $f(x)=x^4-ax^3+18x^2+k$ به شکل زیر است. مقدار k کدام است؟**




۱) $-11$

۲) $-19$

۳) $-8$

۴) $-18$

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**مشاوره** سؤال نمودار توابع پای‌ثابت سؤالات کنکور است که کاربردهای مشتق را نشان می‌دهد. باید در این مبحث، خلاقیت به خرج دهید! سؤال نمودار فصل کاربرد مشتق ترکیبی از تمام موضوعات این فصل است. اگر در حل آن‌ها به مشکل برخوردید مقداری روی سایر موضوعات کار کنید.

**خودت حل کنی بهتره** تقعر نمودار تابع در دو نقطه، تغییر یافته است. برای تعیین این نقاط، از مشتق دوم تابع استفاده کنید تا نقاط عطف به دست بیایند.

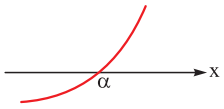
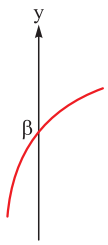
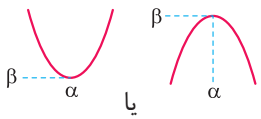
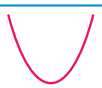
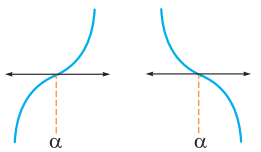
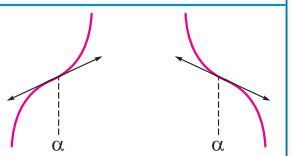
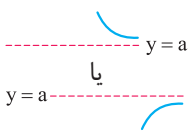
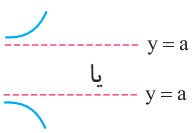
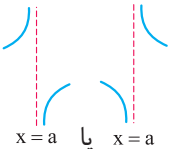
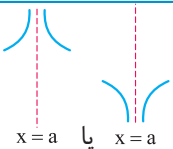
**درس نامه ●● تغییر یکنوایی و تقعر**

۱) وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع را از تغییر علامت $f'$ به دست می‌آوریم.

۲) وضعیت تقعر تابع را از تغییر علامت $f''$ به دست می‌آوریم.

| | حالت اول | حالت دوم | حالت سوم | حالت چهارم |
|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ (صعودی) | $+$ (صعودی) | $-$ (نزولی) | $-$ (نزولی) |
| $f''$ | $+$ (تقعر رو به بالا) | $-$ (تقعر رو به پایین) | $+$ (تقعر رو به بالا) | $-$ (تقعر رو به پایین) |
| مثال نموداری | ↑ | ↓ | ↑ | ↓ |

اطلاعات به‌دست‌آمده از روی نمودار f

| نمودار f | f | f′ | f″ |
|---|---|---|---|
|  | $f(\alpha)=0$ | $f'(\alpha)>0$ (شیب مماس مثبت) | $f''(\alpha)>0$ (تقعر رو به بالا) |
|  | $f(0)=\beta$ | $f'(0)>0$ (شیب مماس مثبت) | $f''(0)<0$ (تقعر رو به پایین) |
|  | $f(\alpha)=\beta$ | $f'(\alpha)=0$ (مماس افقی) | $f''(\alpha)<0$ $f''(\alpha)>0$  |
|  | — | $f'(\alpha)=0$ (مماس در عطف افقی) | عطف $f''(\alpha)=0$ (مشتق دوم در $\alpha$ تغییر علامت می‌دهد.) |
|  | — | (شیب مماس در عطف غیرصفر است.) | $f''(\alpha)=0$ |
|  | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ | — | — |
|  | $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$ | — | — |
|  | a ریشه سادهٔ مخرج است. | — | — |
|  | a ریشهٔ مضاعف مخرج است. | — | — |

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** با توجه به نمودار تابع $f$، به ازای $x=۳$، مشتق این تابع برابر با صفر است، پس:

$$f(x)=x^۴-ax^۳+۱۸x^۲+k \Rightarrow f'(x)=۴x^۳-۳ax^۲+۳۶x$$

$$f'(۳)=۰ \Rightarrow ۴\times ۲۷-۲۷a+۱۰۸=۰ \Rightarrow ۲۷a=۱۰۸\times ۲ \Rightarrow a=۸$$

**گام دوم:** با توجه به نمودار، تقعر تابع در دو نقطه، تغییر یافته است، مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم تا طول این نقاط مشخص شود:

$$f''(x)=۱۲x^۲-۴۸x+۳۶=۰ \Rightarrow ۱۲(x^۲-۴x+۳)=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=۳ \end{cases}$$

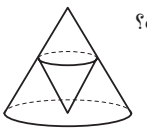
پس $x=۱$ طول نقطهٔ عطف تابع است که در نمودار نیز مشخص شده است. در این نقطه $f(۱)=۰$ است.

**گام سوم:** از $f(۱)=۰$ استفاده می‌کنیم تا مقدار $k$ را پیدا کنیم:

$$f(۱)=۱-۸+۱۸+k=۰ \Rightarrow k=-۱۱$$

## تست و پاسخ ۲۰

**در شکل مقابل، اگر شعاع قاعده و ارتفاع مخروط بزرگ‌تر به ترتیب ۶ و ۸ باشند، حداکثر حجم مخروط کوچک چه عددی است؟**

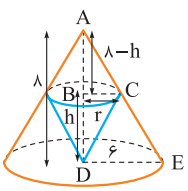


۱) $\frac{۶۴\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۱۲۸\pi}{۹}$ ۳) $\frac{۶۴\pi}{۹}$ ۴) $\frac{۱۲۸\pi}{۲۷}$

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**مشاوره** یک سؤال ساده از کاربرد مشتق در مسئلهٔ بهینه‌سازی؛ اگر این‌گونه سؤالات را در کنکور دیدید، از دستشان ندهید!

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** ارتفاع و شعاع مخروط کوچک را به ترتیب برابر با $h$ و $r$ در نظر می‌گیریم. مقادیر را روی شکل مشخص می‌کنیم:




**گام دوم:** در دو مثلث ABC و ADE، قضیهٔ تالس برقرار است:

$$\frac{r}{۶}=\frac{۸-h}{۸} \Rightarrow r=\frac{۳}{۴}(۸-h)$$

**گام سوم:** حجم مخروط کوچک‌تر برابر است با:

$$V=\frac{\pi}{۳}r^۲h=\frac{\pi}{۳}(\frac{۳}{۴}(۸-h))^۲h=\frac{۳\pi}{۱۶}(۸-h)^۲h$$

**گام چهارم:** بیشترین حجم مخروط کوچک را می‌خواهیم. پس از $V$، نسبت به $h$ مشتق می‌گیریم تا $h$ بهینه به دست آید:

$$V'=\frac{۳\pi}{۱۶}\left(-۲(۸-h)h+(۸-h)^۲\right)=۰ \Rightarrow (۸-h)(۲h+h-۸)=۰ \Rightarrow \begin{cases} h=۸ \\ h=\frac{۸}{۳} \end{cases}$$

**گام پنجم:** برای مخروط کوچک‌تر، $h=\frac{۸}{۳}$ قابل قبول است. برای این مقدار از $h$، حجم برابر است با:

$$V_{max}=\frac{۳\pi}{۱۶}(۸-\frac{۸}{۳})^۲\times\frac{۸}{۳}=\frac{\pi}{۲}\times\frac{۶۴\times ۴}{۹}=\frac{۱۲۸\pi}{۹}$$

## تست و پاسخ ۲۱

**یک رئیس، یک منشی و چهار کارمند به چند طریق می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند به طوری که رئیس و منشی روبه‌روی هم باشند؟**

۱) ۲۴ ۲) ۱۶ ۳) ۶۰ ۴) ۴۸

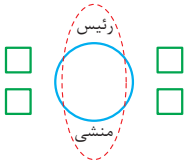
**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**خودت حل کنی بهتره** به مبحث جایگشت دوری مراجعه کن.

$n$ شیء دور یک میز گرد به $(n-۱)!$ حالت می‌توانند قرار بگیرند.

**پاسخ تشریحی**

**گام اول:** رئیس روی هر صندلی بنشیند، منشی روبه‌روی آن است، پس می‌توان رئیس و منشی را در یک بسته قرار دارد.




**گام دوم:** بستهٔ رئیس و منشی با چهار کارمند (در واقع ۵ نفر) می‌خواهند دور یک میز گرد بنشینند که بنا به جایگشت دوری به $۴!=۲۴$ حالت امکان‌پذیر است.

## تست و پاسخ ۲۲

**در یک کلاس ۲۵ نفری، برخی از دانش‌آموزان در المپیاد ریاضی، فیزیک و یا هر دو ثبت‌نام کرده‌اند. یک دانش‌آموز به تصادف از این کلاس انتخاب می‌کنیم، نسبت احتمال حضور او در المپیاد ریاضی به احتمال حضور او در المپیاد فیزیک، $\frac{۵}{۹}$ است. اگر احتمال حضور این دانش‌آموز در هر دو المپیاد ۰/۲۸ باشد، با چه احتمالی او در هیچ المپیادی شرکت نکرده است؟**

۱) ۰/۰۸ ۲) ۰/۱۶ ۳) ۰/۶۴ ۴) ۰/۷۲

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**خودت حل کنی بهتره** $P(A'\cap B')=۱-P(A\cup B)$

**پاسخ تشریحی**

**گام اول:**

A: دانش‌آموزانی که در المپیاد ریاضی شرکت کرده‌اند.

B: دانش‌آموزانی که در المپیاد فیزیک شرکت کرده‌اند.

S: کل دانش‌آموزان یک کلاس

**گام دوم:**

$$P(A\cap B)=۰/۲۸ \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۲۸}{۱۰۰}=\frac{۷}{۲۵}$$

$$\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۷}{۲۵} \Rightarrow n(A\cap B)=۷$$

**گام سوم:**

$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{۵}{۹} \Rightarrow \frac{n(A)}{n(B)}=\frac{۵}{۹} \Rightarrow n(A)=۵x\ ,\ n(B)=۹x$$

$x$ نمی‌تواند بیشتر از ۲ باشد زیرا $n(B)<n(S)$، از طرفی $x=۱$ نمی‌تواند باشد زیرا در این صورت $n(A)=۵$ است. ولی می‌دانیم $n(A\cap B)=۷$ است پس $x=۲$، $n(A)=۱۰$ و $n(B)=۱۸$.

**گام چهارم:**

$$P(A'\cap B')=۱-P(A\cup B)=۱-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$$

$$P(A'\cap B')=۱-\frac{۱۰}{۲۵}-\frac{۱۸}{۲۵}+\frac{۷}{۲۵}=\frac{۴}{۲۵}=۰/۱۶$$

## تست و پاسخ ۲۳

**در یک آزمایش، دو تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد روشدهٔ دو تاس متفاوت باشد، تابع $f(x)=x$ و اگر یکسان باشد، تابع $f(x)=-x$ را تشکیل می‌دهیم. اگر مجموع اعداد روشدهٔ دو تاس، کوچک‌تر از ۶ باشد، $x=۵$ را به عنوان ورودی تابع $f$ و اگر مجموع اعداد روشدهٔ دو تاس، بزرگ‌تر از ۵ باشد، $x=-۵$ را به عنوان ورودی تابع $f$ قرار می‌دهیم. اگر $f(f(f(x)))=۵$ باشد، با چه احتمالی $x=۵$ بوده است؟**

۱) $\frac{۲۵}{۳۸}$ ۲) $\frac{۲۰}{۲۹}$ ۳) $\frac{۲۱}{۲۶}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**خودت حل کنی بهتره** در احتمال شرطی فضای نمونه‌ای محدود می‌شود.

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

**پاسخ تشریحی**

**گام اول:**

$f(x)=x \Rightarrow f(f(f(x)))=x$

$f(x)=-x \Rightarrow f(f(f(x)))=-x$

**گام دوم:** می‌خواهیم $f(f(f(x)))=۵$ باشد بنابراین دو حالت پیش می‌آید:

۱) $x=۵\,,\,f(x)=x \Rightarrow$ عدد روشدهٔ دو تاس متفاوت و مجموع کوچک‌تر از ۶

۸ حالت وجود دارد.

$\{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱)\}$

۲) $x=-۵\,,\,f(x)=-x \Rightarrow$ عدد روشده یکسان و مجموع بزرگ‌تر از ۵

$\{(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\}$

که ۴ حالت وجود دارد.

**گام سوم:** تعداد حالت‌هایی که $f(f(f(x)))=۵$، برابر $۸+۴=۱۲$ است که در ۸ تا از آن‌ها $x=۵$ است.

**گام چهارم:** احتمال خواسته‌شده برابر است با:

$$P=\frac{۸}{۱۲}=\frac{۲}{۳}$$

## تست و پاسخ ۲۴

**در مثلث ABC مجموع زوایای داخلی B و C برابر $۷۰^\circ$ است. عمودمنصف‌های دو ضلع AB و AC، ضلع BC را به ترتیب در D و E قطع می‌کنند. اندازهٔ زاویهٔ DAE کدام است؟**

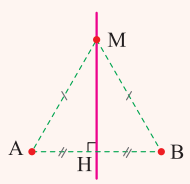
۱) $۲۰^\circ$ ۲) $۳۰^\circ$ ۳) $۴۰^\circ$ ۴) $۵۰^\circ$

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**خودت حل کنی بهتره** نقاطی که روی عمودمنصف یک پاره‌خط هستند، چه ویژگی مهمی دارند؟

**درس نامه**

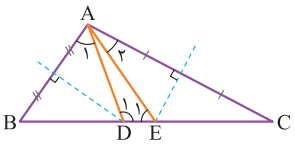
نقاطی که روی عمودمنصف پاره‌خط AB باشند، از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله‌اند و برعکس.




$M$ روی عمودمنصف $AB \Leftrightarrow MA=MB$

**پاسخ تشریحی**

**گام اول (رسم شکل مناسب):** با توجه به شکل، در مثلث ABC که در آن $\hat{A}=۱۸۰^\circ-۷۰^\circ=۱۱۰^\circ$، عمودمنصف‌های AB و AC به ترتیب BC را در D و E قطع کرده‌اند.




**گام دوم (محاسبهٔ زوایای $A_۱$ و $A_۲$):** D روی عمودمنصف AB است پس از A و B به یک فاصله است و E هم روی عمودمنصف AC است، پس از A و C به یک فاصله است، در نتیجه:

$DA=DB \Rightarrow \overset{\Delta}{ADB}$ متساوی‌الساقین $\Rightarrow \hat{B}=\hat{A}_۱ \Rightarrow \hat{B}=\hat{A}_۱ \quad (۱)$

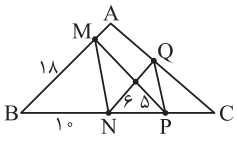
$EA=EC \Rightarrow \overset{\Delta}{AEC}$ متساوی‌الساقین $\Rightarrow \hat{C}=\hat{A}_۲ \quad (۲)$

**گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال):** زاویهٔ $D\hat{A}E$ برابر $\hat{A}-(\hat{A}_1+\hat{A}_2)$ است، در نتیجه با توجه به (۱) و (۲) داریم:

$$D\hat{A}E=\hat{A}-(\hat{B}+\hat{C})=۱۱۰^\circ-۷۰^\circ=۴۰^\circ$$

## تست و پاسخ ۲۵

**در شکل مقابل، اگر $NQ \parallel AB$ و $MN \parallel PQ$، آن‌گاه طول PQ کدام است؟**



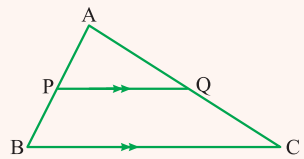

۱) $۲\sqrt{۱۳}$
۲) $۳\sqrt{۵}$
۳) $۴\sqrt{۳}$
۴) $۵\sqrt{۲}$

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**مشاوره** با یک سؤال ترکیبی از قضیهٔ تالس، تشابه مثلث‌ها و ویژگی‌های مثلث قائم‌الزاویه طرفیم. همان‌طور که می‌دانید در سال‌های اخیر، سؤال‌های ترکیبی خیلی مورد علاقهٔ طراحان کنکور بوده است.

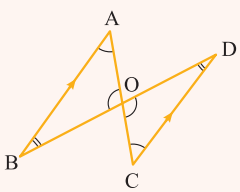
### درس‌نامه

۱) در مثلث ABC زیر، اگر $PQ \parallel BC$ باشد، آن‌گاه رابطه‌های زیر همواره بین پاره‌خط‌های ایجادشده برقرار است:




$$PQ \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC} & \text{(تالس جزء‌به‌جزء)} \\ \frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC} & \text{(تالس جزء‌به‌کل)} \end{cases}$$

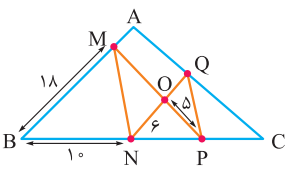
۲) اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگری برابر باشند، آن دو مثلث با هم متشابه‌اند؛ پس در شکل زیر که $AB \parallel CD$، دو مثلث OAB و OCD متشابه‌اند.




$$\begin{cases} \hat{A}=\hat{C} \\ \hat{B}=\hat{D} \end{cases} \xrightarrow{\overset{\Delta}{AOB}\sim\overset{\Delta}{DOC}} \frac{AO}{OC}=\frac{OB}{OD}$$

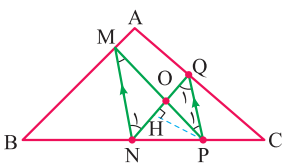
### پاسخ تشریحی

**گام اول (استفاده از قضیهٔ تالس):** طبق صورت سؤال $QN \parallel AB$، پس $MB \parallel ON$ است و می‌توانیم در مثلث MPB قضیهٔ تالس را بنویسیم:




$$MB \parallel ON \Rightarrow \frac{PN}{PB}=\frac{PO}{PM}=\frac{ON}{MB} \Rightarrow \frac{PN}{PN+۱۰}=\frac{۵}{OM+۵}=\frac{۶}{۱۸} \Rightarrow \begin{cases} PN=۵ & (۱) \\ OM=۱۰ \end{cases}$$

**گام دوم (پیداکردن مثلث‌های متشابه و محاسبهٔ طول OQ):** پاره‌خط‌های PQ و MN طبق صورت سؤال با هم موازی‌اند، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه، دو مثلث OPQ و OMN متشابه‌اند و داریم:




$$\frac{ON}{OQ}=\frac{OM}{OP} \Rightarrow \frac{۶}{OQ}=\frac{۱۰}{۵} \Rightarrow OQ=۳$$

**گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال):** از گام اول می‌دانیم که $PN = ۵$، پس مثلث OPN با داشتن دو ضلع برابر، متساوی‌الساقین است و اگر ارتفاع PH را در آن رسم کنیم ضلع ON را نصف می‌کند (ارتفاع، میانه هم هست)، در نتیجه:

$$OH = HN = \frac{۶}{۲} = ۳ \Rightarrow QH = OQ + OH = ۳ + ۳ = ۶$$

از طرفی طبق فیثاغورس در OHP داریم:

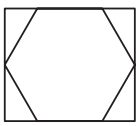
$$PH = \sqrt{۵^۲ - ۳^۲} = ۴$$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ PHQ می‌توانیم بنویسیم:

$$QP = \sqrt{۴^۲ + ۶^۲} = ۲\sqrt{۱۳}$$

## تست و پاسخ ۲۶

**اگر اندازهٔ ضلع شش‌ضلعی منتظم مقابل ۶ باشد، آن‌گاه مساحت مستطیل کدام است؟**

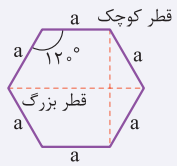


۱) $۹۶\sqrt{۳}$
۲) $۵۴\sqrt{۳}$
۳) $۸۱\sqrt{۳}$
۴) $۷۲\sqrt{۳}$

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**درس‌نامه** در هر مثلث قائم‌الزاویه ضلع مقابل زاویهٔ $۳۰^\circ$، نصف وتر، ضلع مقابل زاویهٔ $۶۰^\circ$، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر و ضلع مقابل زاویهٔ $۴۵^\circ$، $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ وتر است.

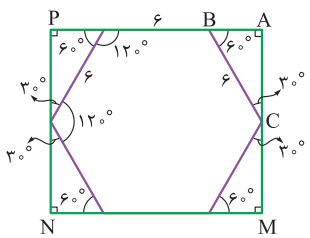
**نکته** اگر طول ضلع شش‌ضلعی منتظم مقابل برابر a باشد، آن‌گاه طول قطر کوچک و بزرگ آن برابر است با:




$$\begin{cases} \text{طول قطر کوچک} = a\sqrt{۳} \\ \text{طول قطر بزرگ} = ۲a \end{cases}$$

**پاسخ تشریحی**

راه اول: اندازهٔ هر ضلع ۶ضلعی منتظم زیر برابر ۶ است و می‌دانیم که هر زاویهٔ داخلی ۶ضلعی منتظم برابر $۱۲۰^\circ$ است و برای محاسبهٔ مساحت مستطیل باید اندازهٔ طول و عرض آن را به دست آوریم. به شکل دقت کنید، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که بین مستطیل و ۶ضلعی تشکیل‌شده همنهشت‌اند و زاویه‌های حادهٔ آن‌ها $۳۰^\circ$ و $۶۰^\circ$ است، پس اضلاع قائم این مستطیل‌ها برابر است با:




$$\overset{\Delta}{ABC}: \begin{cases} \hat{A} = ۹۰^\circ \ , \ BC = ۶ \\ \hat{C} = ۳۰^\circ \Rightarrow AB = \frac{BC}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳ \\ \hat{B} = ۶۰^\circ \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{۳}}{۲} BC = ۳\sqrt{۳} \end{cases}$$

در نتیجه، طول اضلاع مستطیل به صورت مقابل است:

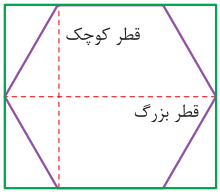
$$AP = ۶ + ۲AB = ۶ + ۶ = ۱۲$$

$$AM = ۲AC = ۶\sqrt{۳}$$

و مساحت مستطیل برابر است با:

$$S_{\text{مستطیل}} = AP \times AM = ۶\sqrt{۳} \times ۱۲ = ۷۲\sqrt{۳}$$

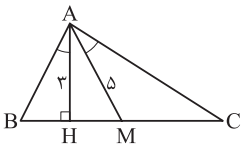
راه دوم: این سؤال یک راه خیلی کوتاه‌تر هم دارد. اگر نکته‌ای را که در درس‌نامه گفتیم حفظ باشید، می‌بینید که طول مستطیل همان قطر بزرگ ۶ضلعی و عرض آن برابر قطر کوچک ۶ضلعی است و می‌توان نوشت:




$$\begin{cases} \text{قطر بزرگ} = ۲a = ۱۲ \\ \text{قطر کوچک} = a\sqrt{۳} = ۶\sqrt{۳} \end{cases} \Rightarrow S_{\text{مستطیل}} = ۱۲ \times ۶\sqrt{۳} = ۷۲\sqrt{۳}$$

## تست و پاسخ ۲۷

**در شکل زیر $AM = ۵$ و $AH = ۳$ به ترتیب، میانه و ارتفاع وارد بر $BC$ هستند. اگر $M\hat{A}C = B\hat{A}H$، آن‌گاه شعاع دایرهٔ محیطی مثلث $ABC$ کدام است؟**



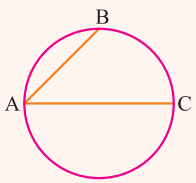

۱) ۵
۲) ۶
۳) $۳\sqrt{۳}$
۴) $۲\sqrt{۶}$

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**خودت حل کنی بهتره** دایرهٔ محیطی $\overset{\Delta}{ABC}$ را رسم کن، میانهٔ $AM$ را امتداد بده تا دایره را قطع کند.

**درس‌نامه**

۱) **زاویهٔ محاطی**: زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره و اضلاعش وترهای دایره باشند را زاویهٔ محاطی می‌نامیم و برابر است با:




$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

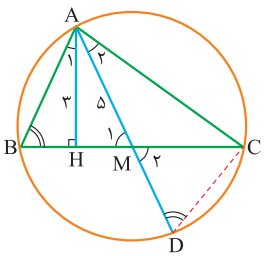
۲) اگر در مثلثی طول میانهٔ وارد بر یکی از اضلاع، نصف طول آن ضلع باشد، زاویهٔ روبه‌روی آن ضلع قائمه است.

۳) در مثلث قائم‌الزاویه، طول میانهٔ وارد بر وتر، نصف طول وتر و برابر با شعاع دایرهٔ محیطی است.

۴) زاویهٔ محاطی مقابل قطر دایره برابر $۹۰^\circ$ است و برعکس، یعنی اگر یک زاویهٔ محاطی در دایره برابر $۹۰^\circ$ باشد. آن زاویه مقابل قطر دایره است.

**پاسخ تشریحی**

**گام اول (ایجاد تغییرات مناسب در شکل و تحلیل آن)**: دایرهٔ محیطی مثلث $ABC$ را رسم کرده و میانهٔ $AM$ را امتداد می‌دهیم تا دایره را در $D$ قطع کند.




**گام دوم (یافتن خواستهٔ سؤال)**: با توجه به این‌که $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ و $\hat{B} = \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$، دو مثلث $ABH$ و $ADC$ دو زاویهٔ برابر دارند، پس زاویهٔ سوم آن‌ها هم با هم برابر است یعنی $A\hat{C}D = ۹۰^\circ$ و در نتیجه $AD$ قطر دایره است. با توجه به این‌که قطر $AD$ وتر $BC$ را نصف کرده و بر آن عمود نیست، $M$ مرکز دایره است. (دقت کنید که اگر $M$ مرکز دایره نباشد، قطر $AD$ که در نقطهٔ $M$ وتر $BC$ را نصف کرده، باید در $M$ بر $BC$ عمود باشد.) یعنی $R = AM = ۵$.

## تست و پاسخ ۲۸

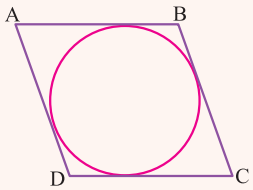
**در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی، طول قاعدهٔ بزرگ، چهار برابر طول قاعدهٔ کوچک است. نسبت شعاع دایرهٔ محاطی به طول ساق ذوزنقه کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) $\frac{۳}{۱۰}$

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

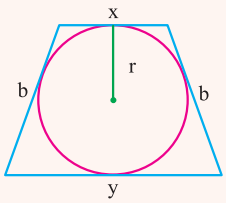
**درس‌نامه**

یک چهارضلعی محیطی است، اگر و فقط اگر مجموع اضلاع روبه‌رو در آن برابر باشند، یعنی:




$ABCD$ محیطی است. $\Leftrightarrow AB + DC = AD + BC$

مطابق شکل در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی به طول قاعده‌های $x$ و $y$ و طول ساق $b$، داریم:




الف) ساق، واسطهٔ حسابی قاعده‌ها است:

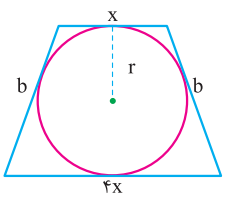
$$b = \frac{x+y}{2}$$

ب) ارتفاع (قطر دایرهٔ محاطی)، واسطهٔ هندسی قاعده‌ها است.

$$2r = \sqrt{xy}$$

**پاسخ تشریحی**

شکل صورت سؤال به صورت روبه‌رو است.




حالا طبق درس‌نامه، قطر واسطهٔ هندسی قاعده‌ها است، پس:

$$2r = \sqrt{(x)(4x)} \Rightarrow 2r = 2x \Rightarrow r = x$$

هم‌چنین ساق واسطهٔ حسابی قاعده‌ها است، پس:

$$b = \frac{x+4x}{2} = \frac{5x}{2}$$

حالا نسبت شعاع دایره به ساق ذوزنقه برابر است با:

$$\frac{r}{b} = \frac{x}{\frac{5}{2}x} = \frac{2}{5}$$

## تست و پاسخ ۲۹

**طول مماس‌مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس‌خارج، واسطهٔ حسابی شعاع‌های دو دایره است. اگر شعاع دایرهٔ کوچک ۱ باشد، شعاع دایرهٔ بزرگ کدام است؟**

۱) $7 + 4\sqrt{3}$
۲) $7 + 2\sqrt{3}$
۳) $8 + 4\sqrt{3}$
۴) $8 + 2\sqrt{3}$

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

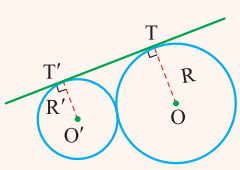
**خودت حل کنی بهتره** طول مماس‌مشترک دو دایرهٔ مماس‌خارج برابر $TT' = 2\sqrt{RR'}$ است.

**درس‌نامه**

۱) اگر $c$ واسطهٔ حسابی $a$ و $b$ باشد، آن‌گاه:

$$c = \frac{a+b}{2}$$

۲) هر دو دایره‌ای که مماس‌مشترک خارجی داشته باشند، طول مماس‌مشترک خارجی آن‌ها برابر است با:



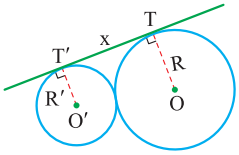

$$TT' = \sqrt{(OO')^2 - (R - R')^2}$$

و اگر این دو دایره مثل شکل بالا مماس‌خارج باشند، چون $OO' = R + R'$ است، داریم:

$$TT' = 2\sqrt{RR'}$$

**پاسخ تشریحی**

**گام اول (محاسبهٔ طول مماس‌مشترک خارجی):** طبق مورد (۲) درس‌نامه، طول مماس‌مشترک خارجی این دو دایره برابر است با:




$$TT' = ۲\sqrt{RR'} = ۲\sqrt{R} = x \quad (۱)$$

**گام دوم (اعمال فرض سؤال و محاسبهٔ خواستهٔ آن):** با توجه به فرض سؤال، داریم:

$$x = \frac{R+R'}{۲} = \frac{۱+R}{۲} \quad (۲)$$

با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲)، داریم:

$$۲\sqrt{R} = \frac{۱+R}{۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۱۶R = R^۲ + ۲R + ۱$$

$$\Rightarrow R^۲ - ۱۴R + ۱ = ۰ \Rightarrow R = ۷ \pm \sqrt{۴۹-۱} = ۷ \pm \sqrt{۴۸} = ۷ \pm ۴\sqrt{۳}$$

چون شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر باید بیشتر از $R' = ۱$ باشد، پس $۷ + ۴\sqrt{۳}$ یعنی ۱ قابل قبول است.

## تست و پاسخ ۳۰

**در مربع ABCD، طول رأس A برابر ۲ و طول رأس B برابر ۴ است. اگر بازتاب دو رأس A و D که هر دو در ربع اول واقع‌اند، نسبت به نیمساز این ربع، بر خودشان منطبق شود، فاصلهٔ بازتاب رأس A نسبت به قطر BD از مبدأ مختصات کدام است؟**

۱) $۲\sqrt{۱۰}$
۲) $۳\sqrt{۵}$
۳) ۷
۴) $۴\sqrt{۳}$

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**درس‌نامه**

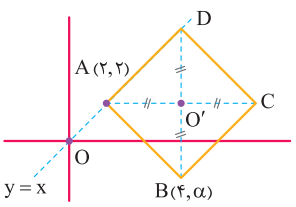
در بازتاب نسبت به خط $\Delta$، تصویر نقطهٔ A نقطه‌ای مانند $A'$ است، به طوری که:

الف) اگر A بر $\Delta$ واقع نباشد، $\Delta$ عمودمنصف $AA'$ است.

ب) اگر A بر $\Delta$ واقع باشد، $A'$ همان A است.

**پاسخ تشریحی**

اگر نقاط $A'$ و $D'$ به ترتیب بازتاب نقاط A و D باشد طبق درس‌نامه، چون سؤال گفته $A'$ بر A و $D'$ بر D منطبق است، پس A و D هم روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد و مختصات آن به صورت $A(۲,۲)$ است. حالا یک شکل تقریبی از مربع ABCD با داشتن مختصات $B(۴,\alpha)$ رسم می‌کنیم.




می‌دانیم در هر مربع، قطرها با هم برابر و عمودمنصف یکدیگرند، پس بازتاب A نسبت به قطر BD همان نقطهٔ C است و چون $x_B - x_A = ۴ - ۲ = ۲$، پس $x_C - x_B = ۲$، پس $x_C = ۶$. از آن‌جا که $D\hat{A}C = ۴۵^\circ$ با زاویهٔ بین امتداد AD با محور xها برابر است، پس AC با محور xها موازی است و داریم $y_C = y_A = ۲$؛ در نتیجه فاصلهٔ C تا مبدأ مختصات برابر است با:

$$OC = \sqrt{(x_C - ۰)^۲ + (y_C - ۰)^۲} = \sqrt{۶^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۴۰} = ۲\sqrt{۱۰}$$

## تست و پاسخ ۳۱

**در یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، نیمساز زاویهٔ کوچک را رسم می‌کنیم. مساحت مثلث اصلی، چند برابر مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل از رسم این نیمساز است؟**

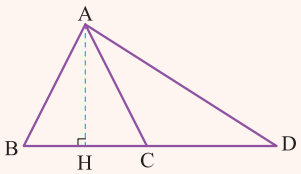
۱) $\sqrt{۲}+۱$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۲+\sqrt{۲}$

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**مشاوره** این سؤال قضیهٔ نیمسازها را با قضایای نسبت مساحت مثلث‌های دارای قاعده یا ارتفاع مشترک ترکیب کرده است که هر دو از مباحث مهم هندسهٔ پایه هستند.

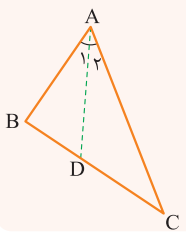
**درس‌نامه**

۱) اگر دو مثلث دارای ارتفاع برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر با نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع مشترک است؛ مثلاً در شکل مقابل داریم:




$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{ACD}}}=\frac{BC}{CD}$$

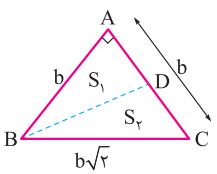
۲) قضیهٔ نیمسازها: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه، ضلع مقابل به آن زاویه را به نسبت اضلاع آن زاویه تقسیم می‌کند:




$$A_۱=A_۲ \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

**پاسخ تشریحی**

**گام اول (استراتژی حل مسئله):** در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC، نیمساز BD را رسم می‌کنیم.




می‌دانیم $AB=AC=b$ و طبق فیثاغورس هم داریم:

$$BC=\sqrt{b^۲+b^۲}=b\sqrt{۲}$$

حالا چون $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{BCD}$ در ارتفاع گذرنده از B مشترک‌اند، نسبت مساحت آن‌ها را می‌نویسیم و چون BD نیمساز است از قضیهٔ نیمسازها در مورد (۲) درس‌نامه استفاده می‌کنیم و خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم.

**گام دوم (استفاده از نسبت مثلث‌های هم‌ارتفاع):** طبق گام اول $S_۱$ و $S_۲$ هم‌ارتفاع‌اند، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه داریم:

$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{AD}{DC} \quad (۱)$$

**گام سوم (استفاده از قضیهٔ نیمسازها):** BD نیمساز است، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC}=\frac{b}{b\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}} \quad (۲)$$

**گام چهارم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال):** طبق قسمت‌های (۱) و (۲) درس‌نامه از گام‌های قبل داریم $\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$، پس $S_۱$ مساحت مثلث کوچک‌تر است و نسبت مساحت مثلث اصلی به مساحت مثلث کوچک‌تر برابر است با:

$$\frac{S_۱}{S_۲}=\frac{۱}{\sqrt{۲}} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{S_۱}{S_۱+S_۲}=\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}} \Rightarrow \frac{S_۱+S_۲}{S_۱}=۱+\sqrt{۲}$$

## تست و پاسخ ۳۲

فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ -۱ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۲\\ -۲ & ۳ & ۱\end{bmatrix}$ و $CBA=۱۵I$. مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $C$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $-۴$ ۳) ۸ ۴) $-۸$

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**مشاوره** اگر در محاسبات اشتباه نکنید، معمولاً سؤالات ماتریس در آزمون‌ها قابل حل هستند. سعی کنید آن‌ها را از دست ندهید.

### درس‌نامه

۱) اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، آن‌گاه:

الف) دترمینان ماتریس $A$ به صورت روبه‌رو تعریف می‌شود: $|A|=ad-bc$

ب) با شرط $|A|\neq ۰$ ماتریس $A$ وارون‌پذیر است و داریم: $A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

۲) می‌دانیم که اگر $A^{-۱}$ وارون ماتریس مربعی $A$ باشد، آن‌گاه $AA^{-۱}=A^{-۱}A=I$ همواره برقرار است، پس برای پیداکردن ماتریس مجهول $C$ در یک معادلهٔ ماتریسی مثل $CBA=D$ کافی است دو طرف معادله را در وارون ماتریس معلوم ضرب کنیم، در این صورت داریم:

$$C\underbrace{BA(BA)^{-۱}}_{I}=D(BA)^{-۱}$$

$$\Rightarrow CI=D(BA)^{-۱} \Rightarrow C=D(BA)^{-۱}$$

### پاسخ تشریحی

**گام اول (استراتژی حل سؤال):** معادلهٔ صورت سؤال به صورت $CBA=۱۵I$ است، تنها ماتریس مجهول، $C$ است، در نتیجه طبق مورد (۲) درس‌نامه کافی است دو طرف معادله را در وارون $BA$ ضرب کنیم.

**گام دوم (محاسبهٔ حاصل‌ضرب BA):**

$$B\times A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۲\\ -۲ & ۳ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ -۱ & ۳\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶ & -۳\\ -۳ & ۱۴\end{bmatrix}$$

**گام سوم (محاسبهٔ وارون BA):** طبق مورد (۱) درس‌نامه داریم:

$$(BA)^{-۱}=\frac{۱}{۶\times ۱۴-۹}\begin{bmatrix}۱۴ & ۳\\ ۳ & ۶\end{bmatrix}=\frac{۱}{۷۵}\begin{bmatrix}۱۴ & ۳\\ ۳ & ۶\end{bmatrix}$$

**گام چهارم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال):** اگر دو طرف معادلهٔ $CBA=۱۵I$ را از سمت راست در $(BA)^{-۱}$ ضرب کنیم، داریم:

$$CBA=۱۵I \Rightarrow C\underbrace{(BA)(BA)^{-۱}}_{I}=۱۵\underbrace{I(BA)^{-۱}}_{BA^{-۱}} \xrightarrow{CI=C} C=۱۵\times\frac{۱}{۷۵}\begin{bmatrix}۱۴ & ۳\\ ۳ & ۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱۴}{۵} & \frac{۳}{۵}\\ \frac{۳}{۵} & \frac{۶}{۵}\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $C$ برابر است با: $\frac{۱۴}{۵}+\frac{۶}{۵}=\frac{۲۰}{۵}=۴$

## تست و پاسخ ۳۳

**شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای که بر هر دو محور مختصات و دایرهٔ $x^۲+y^۲-۱۲x-۱۴y+۸۱=۰$ مماس باشد، کدام است؟**

۱) $۱۲-\sqrt{۵۹}$ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

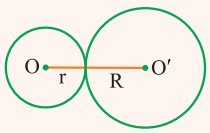
**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**خودت حل کنی بهتره** کوچک‌ترین دایره، دایره‌ای است که بر دایرهٔ مفروض مماس‌خارج باشد.

**درس نامه**

۱) اگر $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادلهٔ یک دایره باشد، مرکز این دایره نقطهٔ $O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$ و شعاع آن $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$ است.

۲) دایره‌ای به مرکز $O$ و شعاع $r$ بر دایره‌ای به مرکز $O'$ و شعاع $R$ مماس‌خارج است اگر فقط اگر:




$$OO'=R+r$$

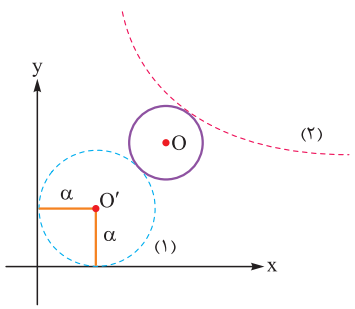
**پاسخ تشریحی**

طبق مورد (۱) درس‌نامه شعاع و مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲-۱۲x-۱۴y+۸۱=۰$ برابر است با:

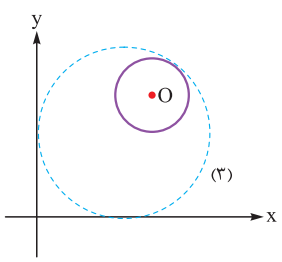
$$O(-(\frac{-۱۲}{۲}),-(\frac{-۱۴}{۲}))=(۶,۷)$$

$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۱۲)^۲+(-۱۴)^۲-۴\times۸۱}=۲$$

که دایره‌ای با این ویژگی‌ها در ناحیهٔ اول مختصات قرار دارد و دایره‌هایی که به این دایره و هم‌چنین محورهای مختصات مماس باشند، به صورت مقابل هستند.



مماس‌خارج



مماس‌داخل

در نتیجه کوچک‌ترین دایره، دایرهٔ شمارهٔ (۱) خواهد بود که بر دایرهٔ اصلی مماس‌خارج است، پس:

$$OO'=R+R' \xrightarrow[R'=\alpha]{O'(\alpha,\alpha)} \sqrt{(\alpha-۶)^۲+(\alpha-۷)^۲}=۲+\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^۲-۳۰\alpha+۸۱=۰ \Rightarrow (\alpha-۳)(\alpha-۲۷)=۰ \Rightarrow \begin{cases}\alpha=۳\\ \alpha=۲۷\end{cases}$$

پس شعاع کوچک‌ترین دایره برابر ۳ است.

## تست و پاسخ ۳۴

**نقطهٔ $M$ واقع بر بیضی به کانون‌های $F$ و $F'$، پاره‌خط $FF'$ را با زاویهٔ $۶۰^\circ$ رؤیت می‌کند. اگر $MF\times MF'=۴۰$ و طول قطر بزرگ بیضی ۱۲ باشد، خروج از مرکز بیضی برابر کدام است؟**

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۶}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

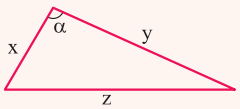
**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**مشاوره** سؤال ترکیبی از موضوع «بیضی» و «قضیهٔ کسینوس‌ها» که مشابه آن را در کنکور هم داشته‌ایم.

**خودت حل کنی بهتره** از قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث $MFF'$ استفاده کنید.

**درس نامه**

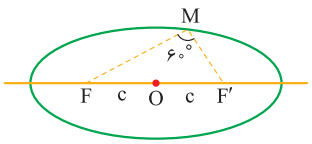
۱) در هر مثلث به طول اضلاع $x$، $y$ و $z$ اگر زاویهٔ بین دو ضلع به طول $x$ و $y$ برابر $\alpha$ باشد، داریم:




$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha$$

۲) مجموع فواصل هر نقطهٔ واقع بر یک بیضی از دو کانون آن برابر با $2a$ است. ضمن این‌که طول قطر بزرگ هر بیضی هم برابر با $2a$ است.

**پاسخ تشریحی** **گام اول (استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها مثلث $FMF'$)**: ابتدا شکل مسئله را رسم می‌کنیم. به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث $MFF'$ داریم:




$$FF'^2 = MF^2 + MF'^2 - 2MF\times MF'\times\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow[MF\times MF'=40]{FF'=2c} 4c^2 = MF^2 + MF'^2 - 40 \quad (1)$$

**گام دوم (استفاده از خاصیت نقطهٔ واقع بر بیضی)**: $M$ روی بیضی قرار دارد، پس $MF + MF' = 2a$ و هم‌چنین طول قطر بزرگ بیضی برابر ۱۲ است یعنی $2a = 12$، بنابراین:

$$MF + MF' = 12 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} MF^2 + MF'^2 + 2MF\times MF' = 144$$

$$\xrightarrow{MF\times MF'=40} MF^2 + MF'^2 = 64$$

**گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال)**: حال با قراردادن مقدار $MF^2 + MF'^2 = 64$ در رابطهٔ (۱) داریم:

$$4c^2 = 64 - 40 \Rightarrow 4c^2 = 24$$

$$\Rightarrow c^2 = 6 \Rightarrow c = \sqrt{6}$$

بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ است.

## تست و پاسخ ۳۵

**زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ حاده است و $|\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}| = 4$. اگر مساحت متوازی‌الاضلاع بناشده روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با ۲ واحد سطح باشد، طول قطر بزرگ این متوازی‌الاضلاع کدام است؟**

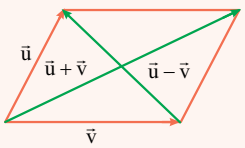
۱) $3\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{3}$

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**خودت حل کنی بهتره** اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ضلع‌های متوازی‌الاضلاع باشند، قطرهای آن برحسب $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چه بردارهایی هستند؟

**درس نامه**

۱) مطابق شکل، اگر دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ که با هم زاویهٔ حاده می‌سازند، ضلع‌های یک متوازی‌الاضلاع باشند، بردار $\vec{u}+\vec{v}$ قطر بزرگ و بردار $\vec{u}-\vec{v}$ قطر کوچک این متوازی‌الاضلاع است.




۲) اگر دو بردار بر هم عمود باشند، حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها صفر است.

۳) مساحت متوازی‌الاضلاع بناشده روی دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ برابر است با: $S = |\vec{u}\times\vec{v}|$

**پاسخ تشریحی**

چون زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ حاده است، پس قطر بزرگ متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده روی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $\vec{a}+\vec{b}$ است که برای به دست آوردن آن داریم:

$$|\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}|=۴ \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} |(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{b})|^۲=۱۶$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|^۲+|\vec{a}\times\vec{b}|^۲+۲\underbrace{(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b})}_{\text{صفر}}=۱۶ \quad (۱)$$

دقت کنید بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ بر بردار $\vec{a}+\vec{b}$ عمود است.

در طراحی سؤال گفته مساحت متوازی‌الاضلاع برابر ۲ است، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه داریم:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=۲$$

در نتیجه طبق رابطهٔ (۱) داریم:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^۲+۲^۲=۱۶ \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$$

## تست و پاسخ ۳۶

**اعداد $a^۲-۲$ و $\overline{a۵a۱}$ در تقسیم بر ۱۱، باقی‌ماندهٔ یکسان دارند. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $a^{a^a}$ بر عدد ۵ برابر r است. مجموع مقادیر مختلف برای r کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۰

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**خودت حل کنی بهتره** در بسط هر عدد n رقمی مانند $A=\overline{a_{n-۱}a_{n-۲}...a_۲a_۱a_۰}$ خواهیم داشت:

$$A\overset{۵}{\equiv}a_۰ \quad , \quad A\overset{۱۱}{\equiv}a_۰-a_۱+...+(-۱)^{n-۱}a_{n-۱}$$

**پاسخ تشریحی**

**گام اول:** اعداد $a^۲-۲$ و $\overline{a۵a۱}$ در تقسیم بر ۱۱ باقی‌ماندهٔ یکسان دارند بنابراین به پیمانهٔ ۱۱ همنهشت هستند.

$$a^۲-۲\overset{۱۱}{\equiv}\overline{a۵a۱}=۱-a+۵-a=۶-۲a$$

$$\Rightarrow a^۲+۲a-۸\overset{۱۱}{\equiv}۰ \Rightarrow (a-۲)(a+۴)\overset{۱۱}{\equiv}۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-۲\overset{۱۱}{\equiv}۰ \Rightarrow a\overset{۱۱}{\equiv}۲ \\ a+۴\overset{۱۱}{\equiv}۰ \Rightarrow a\overset{۱۱}{\equiv}-۴+۱۱=۷ \end{cases}$$

**گام دوم:** a یک رقمی بین ۰ تا ۹ است، بنابراین:

$$\begin{cases} a\overset{۱۱}{\equiv}۲ \Rightarrow a=۲ \\ a\overset{۱۱}{\equiv}۷ \Rightarrow a=۷ \end{cases}$$

**گام سوم:** باقی‌ماندهٔ $a^{a^a}$ را بر ۵ به دست می‌آوریم:

$$a=۲ \Rightarrow ۲\overset{۵}{\equiv}۲ \Rightarrow ۲^{۲^۲}=۲^۴=۱۶\overset{۵}{\equiv}۱ \quad (I)$$

$$a=۷ \Rightarrow ۷\overset{۵}{\equiv}۲ \Rightarrow ۷^{۷^۷}\overset{۵}{\equiv}۲^{۷^۷}$$

حال باقی‌ماندهٔ $۷^۷$ را بر ۴ به دست می‌آوریم:

$$۷^۷\overset{۴}{\equiv}(-۱)^۷=-۱+۴=۳\Rightarrow ۷^۷=۴k+۳$$

بنابراین:

$$۲^{۷^۷}=۲^{۴k+۳}=(۲^۴)^k\times۲^۳\overset{۵}{\equiv}۱\times۲^۳\overset{۵}{\equiv}۳ \quad (II)$$

**گام چهارم:** مجموع مقادیر مختلف r را به دست می‌آوریم:

$$(I),(II): ۱+۳=۴$$

## تست و پاسخ ۳۷

**مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دورقمی $x$ که در معادلهٔ $5x-7y=17$ $(x,y\in\mathbb{N})$ صدق می‌کند، کدام است؟**

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**خودت حل کنی بهتره** معادلهٔ سیاله را به معادلهٔ همنهشتی با مجهول $x$ تبدیل کن.

**پاسخ تشریحی**

**گام اول:** $(5,-7)=1\mid 17$ پس معادلهٔ سیاله جواب دارد.

**گام دوم:** معادلهٔ سیاله را به معادلهٔ همنهشتی به پیمانهٔ ۷ با مجهول $x$ تبدیل می‌کنیم:

$$5x-7y=17 \Rightarrow 5x\overset{7}{\equiv}17\overset{7}{\equiv}3+7=10 \Rightarrow 5x\overset{7}{\equiv}10\ ,\ (5,7)=1$$

$$\Rightarrow x\overset{7}{\equiv}2 \Rightarrow x=7k+2\ ,\ (k\in\mathbb{Z})$$

**گام سوم:** مقدار $k$ را به دست می‌آوریم:

$$7k+2<100 \Rightarrow 7k<98 \Rightarrow k<\frac{98}{7}=14 \Rightarrow k\le 13$$

بنابراین $k=13$.

**گام چهارم:** بزرگ‌ترین عدد دورقمی $x$ که در معادلهٔ سیاله $5x-7y=17$ صدق می‌کند برابر است با:

$$x=7k+2=7\times 13+2=93$$

**گام پنجم:** مجموع ارقام $x$ برابر است با:

$$x=93 \Rightarrow 9+3=12$$

## تست و پاسخ ۳۸

**هر کدام از جواب‌های معادلهٔ $[x]+[y]+[z]=5$ $(x,y,z\ge 0)$ را یک نقطه به شکل $(x,y,z)$ در دستگاه مختصاتی $\mathbb{R}^3$ در نظر می‌گیریم. حجم شکل حاصل از این نقاط کدام است؟**

۱) ۲۱ ۲) ۵۶ ۳) ۱۲۵ ۴) ۲۱۶

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**خودت حل کنی بهتره** تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$

**پاسخ تشریحی**

**گام اول:** چون $x,y,z\ge 0$ و $[x]$، $[y]$ و $[z]$ اعداد صحیح هستند، پس تعداد جواب‌های معادلهٔ $[x]+[y]+[z]=5$ برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=5$ یعنی $\binom{7}{2}=21$.

**گام دوم:** در هر کدام از حالت‌ها مقادیر $x$، $y$ و $z$ یک مکعب به ضلع ۱ تشکیل می‌دهند که حجم آن برابر $1\times 1\times 1=1$ است.

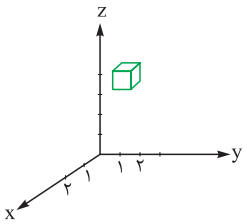
**گام سوم:** ۲۱ حالت مختلف برای $x$، $y$ و $z$ وجود دارد که در همهٔ حالت‌ها حجم شکل حاصل یکسان است، پس حجم شکل حاصل از این نقاط برابر ۲۱ است.

**توجه** این ۲۱ مکعب تشکیل‌شده روی حجم یکدیگر اشتراکی ندارند زیرا بازه‌ای را نمی‌توان پیدا کرد که هر ۳ مؤلفه دو مکعب دلخواه در آن اشتراک داشته باشند.

**گام چهارم:** یکی از حالت‌ها را بررسی می‌کنیم.

$$[x]+[y]+[z]=۵ \Rightarrow [x]=۱,[y]=۱,[z]=۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [x]=۱ \Rightarrow ۱\le x<۲ \\ [y]=۱ \Rightarrow ۱\le y<۲ \\ [z]=۳ \Rightarrow ۳\le z<۴ \end{cases}$$




## تست و پاسخ ۳۹

**فرض کنید $A=\{[x]\,|\,x\in\mathbb{R}\,,x^۲\le ۴\}$ و $B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,۵^x\,|\,۶۲۵\}$. حداقل چند نقطه از مجموعهٔ $A\times B$ انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم می‌توان با نقاط انتخاب‌شده یک مثلث تشکیل داد؟**

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**خودت حل کنی بهتره** ضرب دکارتی بین دو مجموعهٔ A و B:

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A\wedge y\in B\}$$

**اصل لانه‌کبوتری:** اگر $m$ کبوتر و $n$ لانه داشته باشیم و $m>n$ و همهٔ کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

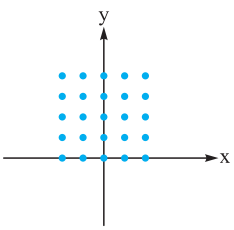
**پاسخ تشریحی**

**گام اول:** تعداد نقاط مجموعه‌های A و B را به دست می‌آوریم.

$$A=\{[x]\,|\,x\in\mathbb{R}\,|\,x^۲\le ۴\}=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$$

$$B=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,۵^x\,|\,۶۲۵\}=\{۰,۱,۲,۳,۴\}$$

**گام دوم:** مجموعهٔ $A\times B$ را تشکیل می‌دهیم:




$$A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A\wedge y\in B\}$$

**گام سوم:** برای تشکیل مثلث نیاز به سه نقطه داریم. اگر سه نقطه در یک راستا باشند مثلث تشکیل نمی‌شود.

حداکثر نقاطی که در یک راستا هستند ۵ نقطه است (تعداد لانه‌ها)، بنابراین اگر ۶ نقطه انتخاب کنیم (تعداد کبوترها) مطمئن هستیم که حداقل یک نقطه از بین این ۶ نقطه با بقیهٔ نقاط در یک راستا نیست.

## تست و پاسخ ۴۰

**درجهٔ رئوس یک گراف به صورت $۴,۴,x,x,x,x$ است. اگر این گراف فاقد دور به طول فرد باشد و تعداد $\gamma-$ مجموعه‌های آن برابر $n$ باشد، حاصل $n+\gamma$ کدام است؟**

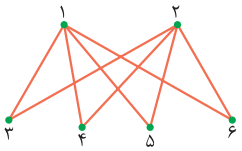
۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**خودت حل کنی بهتره** گراف دوبخشی فاقد دور به طول فرد است و بالعکس.

**پاسخ تشریحی**

**گام اول:** چون گراف فاقد دور به طول فرد است، بنابراین به شکل زیر یعنی $۴,۴,۲,۲,۲,۲$ است.




**گام دوم:** در این گراف $\Delta = ۴$ و $P = ۶$ بنابراین:

$$\left\lceil \frac{P}{\Delta+۱} \right\rceil \leq \gamma \Rightarrow \left\lceil \frac{۶}{۴+۱} \right\rceil = ۲ \leq \gamma$$

از طرفی رئوس ۱ و ۲ گراف را احاطه می‌کند پس $\gamma = ۲$ .

**گام سوم:** تعداد $\gamma$ مجموعه‌های گراف را حساب می‌کنیم. با انتخاب دو رأس بالا یعنی رئوس $\{۱,۲\}$ گراف احاطه می‌شود. یک رأس از بین دو رأس بالا و یک رأس از بین چهار رأس پایین نیز یک $\gamma$ مجموعه تشکیل می‌دهند، بنابراین تعداد $\gamma$ مجموعه‌ها برابر است با:

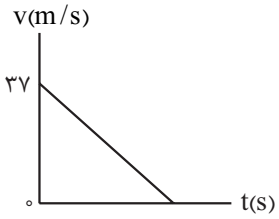
$$n = \underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{یک رأس از دو رأس بالا}} \times \underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{یک رأس از چهار رأس پایین}} + \underbrace{۱}_{\text{انتخاب دو رأس بالا}} = ۲ \times ۴ + ۱ = ۹ \Rightarrow n = ۹$$

**گام چهارم:** محاسبهٔ $\gamma + n$:

$$\gamma = ۲ , n = ۹ \Rightarrow \gamma + n = ۲ + ۹ = ۱۱$$

## تست و پاسخ ۴۱

**نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر متحرک ۳۶m ابتدای حرکت را در مدت t و ۳۶m انتهای حرکت را در مدت ۶t طی کند، اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در کل این حرکت چند متر است؟**




۱) ۲۴۳ / ۲۵
۲) ۳۴۲ / ۲۵
۳) ۴۸۶ / ۵
۴) ۶۸۴ / ۵

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**خودت حل کنی بهتره** جابه‌جایی در t ثانیهٔ اول را به کمک رابطهٔ $\Delta x = \frac{1}{2}a(t)^2 + v_0(t)$ به دست آورید و سپس جابه‌جایی در ۶t ثانیهٔ انتهای حرکت را به کمک رابطهٔ $\Delta x = -\frac{1}{2}a(6t)^2 + v_{\text{نهایی}}(6t)$ به دست آورید و هر دو جابه‌جایی را برابر ۳۶ قرار دهید و در نهایت شتاب حرکت را به دست آورید تا بتوانید جابه‌جایی متحرک در کل این حرکت را محاسبه کنید.

**درس نامه** برای محاسبهٔ جابه‌جایی در بازهٔ زمانی $\Delta t$ در حرکت با شتاب ثابت a می‌توانیم از دو رابطهٔ زیر استفاده کنیم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 + \underbrace{v_1}_{\text{سرعت جسم در ابتدای بازهٔ } \Delta t}(\Delta t)$$

$$\Delta x = -\frac{1}{2}a(\Delta t)^2 + \underbrace{v_2}_{\text{سرعت جسم در انتهای بازهٔ } \Delta t}(\Delta t)$$

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** جابه‌جایی در t ثانیهٔ اول حرکت و با سرعت اولیهٔ $v_0 = 37\,m/s$، برابر با $36\,m$ داده‌شده؛ بنابراین داریم:

$$\text{جابه‌جایی در } t \text{ ثانیهٔ اول با سرعت اولیهٔ } v_0 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 36 = \frac{1}{2}at^2 + 37t \quad (I)$$

**گام دوم:** جابه‌جایی در ۶t ثانیهٔ پایانی که سرعت متحرک در انتهای این بازهٔ زمانی صفر است، برابر با $36\,m$ داده‌شده است؛ بنابراین داریم:

$$\text{جابه‌جایی در } 6t \text{ ثانیهٔ پایانی با سرعت نهایی صفر} \Rightarrow \Delta x = \frac{-1}{2}a(6t)^2 + v_{\text{پایانی}}(6t)$$

$$36 = -\frac{1}{2}a(36t^2) + 0 \Rightarrow at^2 = -2 \quad (II)$$

**گام سوم:** به کمک رابطه‌های I و II در گام اول و دوم، شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

$$36 = \frac{1}{2}at^2 + 37t \xrightarrow{at^2 = -2} 36 = \frac{-2}{2} + 37t \Rightarrow t = 1s$$

$$at^2 = -2 \xrightarrow{t=1s} a = -2\,m/s^2$$

**گام چهارم:** حال که شتاب و سرعت اولیه و نهایی را داریم، جابه‌جایی جسم را در کل مسیر حرکت به کمک رابطهٔ $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$ به دست می‌آوریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0^2 - (37)^2 = 2(-2)\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{37 \times 37}{4} = 342/25\,m$$

## تست و پاسخ ۴۲

**خودرویی در یک مسیر مستقیم از حال سکون و با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند و پس از مدتی تندی خود را با شتاب ثابتی به بزرگی $2\,m/s^2$ کاهش می‌دهد تا متوقف شود. اگر در مدتی که حرکت خودرو به صورت تندشونده است، تندی متوسط آن برابر با $20\,m/s$ و مسافت طی‌شده توسط خودرو در کل مسیر برابر با ۶۰۰m باشد، اندازهٔ جابه‌جایی خودرو در ۷ ثانیهٔ دوم حرکت آن چند متر است؟**

۱) ۱۸۴
۲) ۲۴۶
۳) ۲۸۸
۴) ۳۲۶

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

# پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی خیلی سبز





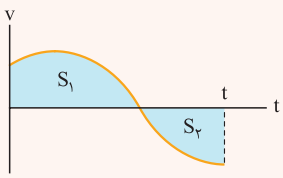
**مشاوره** در حل سؤال‌های حرکت با شتاب ثابت توصیه می‌کنیم که سؤال را به فضای نمودار $(v-t)$ ببرید. هم تحلیل آن ساده‌تر است و هم سرعت شما در محاسبات بالاتر خواهد رفت.

**خودت حل کنی بهتره** نمودار سرعت ـ زمان را برای خودرو رسم کنید و با توجه به تندی متوسط در مرحلهٔ تندشونده، بیشترین تندی خودرو (قبل از ترمزکردن) را به دست آورید، سپس به کمک مساحت محدود به این نمودار و محور زمان، که بیانگر جابه‌جایی است، مدت‌زمان کل حرکت را به دست آورید.

با استفاده از شتاب در مرحلهٔ دوم حرکت $(a=-2\,m/s^2)$، مدت‌زمان حرکت کندشونده را به دست آورید. در نتیجه، مدت‌زمان تندشونده‌بودن حرکت هم به دست می‌آید.

حالا که تمام اطلاعات را داریم، جابه‌جایی متحرک را در بازهٔ زمانی ۷s تا ۱۴s به کمک نمودار یا روابط به دست آورید.

**درس نامه** مساحت محدود بین نمودار و محور زمان در نمودار $v-t$، بیانگر جابه‌جایی است.

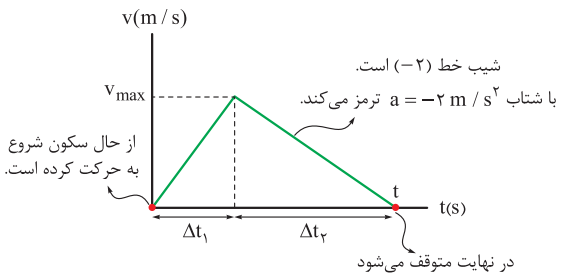



جابه‌جایی: $\Delta x_{(0-t)} = +S_1 - S_2$

مسافت طی‌شده: $\ell_{(0-t)} = +S_1 + S_2$

شیب نمودار سرعت ـ زمان، بیانگر شتاب است؛ بنابراین در حرکت با شتاب ثابت، نمودار سرعت ـ زمان به صورت خطی است.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** شکل زیر، نمودار سرعت ـ زمان خودرو را نشان می‌دهد.




**گام دوم:** تندی متوسط در $\Delta t_1$ ثانیهٔ اول برابر با $20\,m/s$ است. *(چون خودرو تغییر جهت نداده، پس می‌توانیم به مسافت بگیم سرعت متوسط هم در این بازه همون $20\,m/s$ است)*؛ بنابراین در بازهٔ زمانی $\Delta t_1$ داریم:

$$v_{av} = \frac{v_0 + v_{max}}{2} \Rightarrow 20 = \frac{0 + v_{max}}{2} \Rightarrow v_{max} = 40\,m/s$$

**گام سوم:** مسافت طی‌شده در کل مسیر *(چون خودرو تغییر جهت نداده، می‌توانیم به مسافت بگیم جابه‌جایی)* برابر $600\,m$ است؛ بنابراین مساحت محدود بین نمودار و محور زمان در کل $t$ ثانیه، معادل $600\,m$ است.

$$\frac{v_{max} \times t}{2} = 600 \Rightarrow \frac{40 \times t}{2} = 600 \Rightarrow t = 30\,s$$

**گام چهارم:** اندازهٔ شیب خط در بازهٔ زمانی $\Delta t_2$، برابر ۲ است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{v_{max}}{\Delta t_2} = 2 \Rightarrow \frac{40}{\Delta t_2} = 2 \Rightarrow \Delta t_2 = 20\,s$$

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = 30 \Rightarrow \Delta t_1 + 20 = 30 \Rightarrow \Delta t_1 = 10\,s$$

**گام پنجم:** اندازهٔ جابه‌جایی در ۷ ثانیهٔ دوم $(t_1 = 7s$ تا $t_2 = 14s)$ را به دست می‌آوریم. در بازهٔ ۷s تا ۱۰s، شتاب خودرو برابر با $a_1 = \frac{v_{max}}{\Delta t_1} = \frac{40}{10} = 4\,m/s^2$ است و در بازهٔ ۱۰s تا ۱۴s شتاب خودرو $a_2 = -2\,m/s^2$ است. حال جابه‌جایی را در این دو بازهٔ مختلف به دست می‌آوریم و با هم جمع می‌کنیم:

جابه‌جایی در بازهٔ ۷s تا ۱۰s برابر است با:

$$\Delta x_1 = -\frac{1}{2}a_1 t^2 + v_{1_0} t$$

$$\Delta x_1 = -\frac{1}{2}(4)(3)^2 + 40(3) = -18 + 120 = 102\,m$$

جابه‌جایی در بازهٔ ۱۰s تا ۱۴s برابر است با:

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2}a_2 t^2 + v_{10}t$$

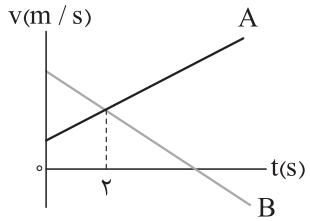
$$\Delta x_2 = \frac{1}{2}(-2)(4)^2 + 40(4) = -16 + 160 = 144\,m$$

بنابراین جابه‌جایی خودرو در ۷ ثانیهٔ دوم حرکت برابر است با:

$$\Delta x_{(7s-14s)} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 102 + 144 = 246\,m$$

## تست و پاسخ ۴۳

**نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که روی محور x حرکت می‌کنند، به شکل زیر است. اگر دو متحرک، در مبدأ زمان در یک مکان قرار داشته باشند، فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ t = ۸s چند برابر فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ t = ۲s است؟**

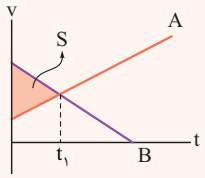



۱) ۳
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

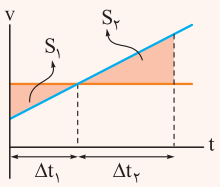
**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**خودت حل کنی بهتره** مساحت محدود بین نمودارهای A و B بیانگر جابه‌جایی دو متحرک نسبت به یکدیگر است. این مساحت را یک بار در ۲ ثانیهٔ اول و بار دیگر در ۸ ثانیهٔ اول محاسبه کنید تا در نهایت این دو را با هم مقایسه کنید، حتماً از تشابه مثلث‌ها، در روند حل سؤال استفاده کنید.

**درس نامه** مساحت محدود بین نمودارهای دو متحرک در نمودار $v-t$، بیانگر جابه‌جایی دو متحرک نسبت به یکدیگر است.



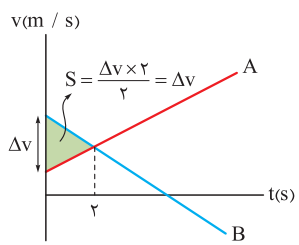

$\Rightarrow$ در $t_1$ ثانیهٔ اول، متحرک B به اندازهٔ S واحد نسبت به متحرک A بیشتر جابه‌جا شده است.




$\Rightarrow$ اگر نسبت تشابه دو مثلث k باشد، نسبت مساحت این دو مثلث $k^2$ است.

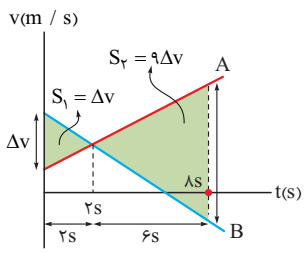
$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = k \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = k^2$$

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** هر دو متحرک در مبدأ زمان در یک مکان قرار دارند، جابه‌جایی نسبی دو متحرک A و B را که برابر با مساحت محدود بین نمودارهای $(v-t)$ دو متحرک A و B است، در مدت ۲s مشخص می‌کنیم.




$$\Delta x_{AB} = \Delta v$$

**گام دوم:** مطابق شکل، جابه‌جایی نسبی دو متحرک A و B را پس از مدت‌زمان ۸s مشخص می‌کنیم:



دو مثلث هاشورخورده با نسبت تشابه $\frac{۶}{۲}=۳$ با هم متشابه هستند؛ بنابراین نسبت مساحت مثلث هاشورخوردهٔ بزرگ‌تر به مثلث هاشورخوردهٔ کوچک‌تر، $(۳)^۲$ است.

$$\Delta x'_{AB} = +\Delta v - ۹\Delta v = -۸\Delta v$$

**گام سوم:** نسبت فاصلهٔ دو متحرک در $t=۸s$ و $t=۲s$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta x'_{AB}}{\Delta x_{AB}} = \frac{|-۸\Delta v|}{\Delta v} = ۸$$

## تست و پاسخ ۴۴

**در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع h نسبت به سطح زمین رها می‌شود. اگر گلوله ۲۸m انتهای حرکت خود تا رسیدن به سطح زمین را در مدت ۲s طی کند، تندی گلوله در فاصلهٔ $\frac{h}{۲}$ از سطح زمین، چند متر بر ثانیه است؟ $(g=۱۰\ m/s^۲)$**

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) $۱۲\sqrt{۲}$ ۴) $۱۶\sqrt{۲}$

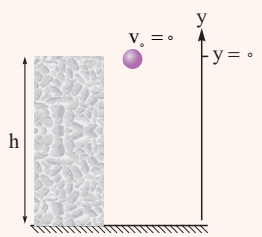
**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**خودت حل کنی بهتره** رابطهٔ $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ و $\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}$ را در ۲s آخر حرکت به کار ببرید تا سرعت برخورد گلوله با سطح زمین را به دست آورید.

سپس به کمک سرعت برخورد گلوله با زمین و رابطهٔ $v^۲=-۲g\Delta y$ ارتفاعی که گلوله از آنجا رها شده است $(h)$ را محاسبه کنید.

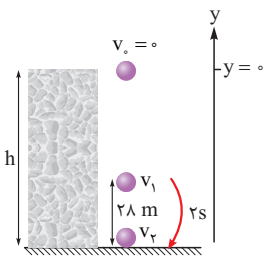
در نهایت رابطهٔ $v^۲=-۲g\Delta y$ را پس از پیمودن $(\frac{h}{۲})$ از مسیر به کار ببرید تا سرعت در میانهٔ راه به دست بیاید.

**درس نامه** اگر جسمی در شرایط خلأ (مقاومت هوا ناچیز است) از ارتفاع h مطابق شکل زیر رها شود، حرکت جسم از نوع سقوط آزاد است. در این صورت جسم با شتابی ثابت به بزرگی g سقوط خواهد کرد و روابط زیر برای آن برقرار است.




| | |
|---|---|
| $v=-gt$ | سرعت در لحظهٔ t |
| $\Delta y=-\frac{۱}{۲}gt^۲$ | جابه‌جایی پس از t ثانیه |
| $v^۲=-۲g\Delta y$ | رابطهٔ مستقل از زمان |
| $-g=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ | شتاب گرانش |
| $\frac{\Delta y}{\Delta t}=\underbrace{(\frac{v_۱+v_۲}{۲})}_{v_{av}}$ | |

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** شکل زیر وضعیت گلوله از لحظهٔ رهاشدن تا رسیدن به سطح زمین را نشان می‌دهد.




به کمک رابطهٔ $-g=\frac{\Delta v}{\Delta t}$، اختلاف سرعت در نقطه‌های (۲) و (۱) را به دست می‌آوریم؛

$$-g=\frac{v_۲-v_۱}{۲} \Rightarrow v_۲-v_۱=-۲۰ \quad (I)$$

جابه‌جایی گلوله $(\Delta y)$ در ۲s آخر حرکت از رابطهٔ $\Delta y=(\frac{v_۱+v_۲}{۲})\Delta t$ به دست می‌آید؛ بنابراین داریم:

$$-۲۸=(\frac{v_۱+v_۲}{۲})\times ۲ \Rightarrow v_۲+v_۱=-۲۸ \quad (II)$$

**گام دوم:** با استفاده از رابطه‌های (I) و (II)، سرعت گلوله در لحظهٔ برخورد به زمین ($v_۲$) را محاسبه می‌کنیم و سپس به کمک رابطهٔ $v_۲^۲ = -۲g\Delta y$ ارتفاع $h$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} v_۲ - v_۱ = -۲۰ \\ v_۲ + v_۱ = -۲۸ \end{cases} \Rightarrow ۲v_۲ = -۴۸ \Rightarrow v_۲ = -۲۴\,m/s$$

$$v_۲^۲ = -۲g\Delta y \Rightarrow (-۲۴)^۲ = -۲(۱۰)(-h) \Rightarrow h = \frac{(۲۴)^۲}{۲۰} = ۲۸/۸\,m$$

**گام سوم:** تندی گلوله را در ارتفاع $\frac{h}{۲} = ۱۴/۴\,m$ به دست می‌آوریم. گلوله برای رسیدن به ارتفاع $۱۴/۴\,m$، جابه‌جایی $-۱۴/۴\,m$ را داشته است؛ بنابراین داریم:

$$v^۲ = -۲g\Delta y = -۲(۱۰)(-۱۴/۴) = ۲\times ۱۴۴ \Rightarrow v_۲ = ۱۲\sqrt{۲}\,m/s$$

## تست و پاسخ ۴۵

**دو گوی هم‌اندازهٔ A و B که جرم گوی A بیشتر از جرم گوی B است، به‌صورت هم‌زمان، از سطح زمین و با سرعت اولیهٔ یکسان، در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌شوند. اگر اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر دو گوی در طی حرکت آن‌ها ثابت و یکسان باشد، چه تعداد از موارد زیر درست است؟**

**الف) مدت بالارفتن گوی A بیشتر از مدت بالارفتن گوی B است.**

**ب) ارتفاع اوج گوی A کم‌تر از ارتفاع اوج گوی B است.**

**پ) تندی برخورد به سطح زمین گوی A بیشتر از تندی برخورد به زمین گوی B است.**

**ت) تندی متوسط هر دو گوی از لحظهٔ پرتاب تا بالاترین نقطهٔ مسیرشان برابر است.**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** اندازهٔ شتاب هر یک از دو گوی، هنگام بالارفتن از رابطهٔ $a = g + \frac{f_D}{m}$ به دست می‌آید. باتوجه به این‌که گوی A جرم بیشتری دارد، شتاب گوی A کم‌تر است.

$$a = g + \frac{f_D}{m} \xrightarrow{(f_D)_A = (f_D)_B,\, m_A > m_B} a_A < a_B$$

سرعت اولیه و نهایی دو گوی در مسیر رفت (تا رسیدن به نقطهٔ اوج) یکسان است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{\Delta v_A}{\Delta t_A} < \frac{\Delta v_B}{\Delta t_B} \xrightarrow{\Delta v_A = \Delta v_B} \Delta t_A > \Delta t_B$$

بنابراین مورد «الف» درست است.

**گام دوم:** با استفاده از رابطهٔ $\Delta y = (\frac{v_۰ + v_{اوج}}{۲})\Delta t$، ارتفاع اوج دو گوی را به دست می‌آوریم و مقایسه می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{گوی A} \Rightarrow \Delta y_A = (\frac{v_{۰A} + ۰}{۲})\Delta t_A \\ \text{گوی B} \Rightarrow \Delta y_B = (\frac{v_{۰B} + ۰}{۲})\Delta t_B \end{array}\right\} \xrightarrow[\Delta t_A > \Delta t_B]{v_{۰A} = v_{۰B}} \Delta y_A > \Delta y_B$$

پس مورد «ب» نادرست است.

**گام سوم:** اندازهٔ شتاب در مسیر برگشت از رابطهٔ $a' = g - \frac{f_D}{m}$ به دست می‌آید و باتوجه به این‌که جرم گوی A بیشتر است، شتاب گوی A در مسیر برگشت بیشتر است.

$$a'_{\text{برگشت}} = g - \frac{f_D}{m} \xrightarrow{m_A > m_B} (a'_A)_{\text{برگشت}} > (a'_B)_{\text{برگشت}}$$

به کمک رابطهٔ $v^۲ - v_{اوج}^۲ = ۲a'\Delta y'$ در مسیر برگشت تندی دو گوی در زمان رسیدن به زمین را مقایسه می‌کنیم: $(\Delta y = \Delta y')$

$$\left.\begin{array}{l} \text{گوی A} \Rightarrow v_A^۲ - ۰^۲ = ۲a'_A\Delta y'_A \\ \text{گوی B} \Rightarrow v_B^۲ - ۰^۲ = ۲a'_B\Delta y'_B \end{array}\right\} \xrightarrow[\Delta y'_A > \Delta y'_B]{a'_A > a'_B} v_A > v_B$$

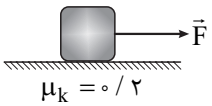
بنابراین گوی A با تندی بیشتری به زمین برمی‌گردد. در نتیجه مورد «پ» درست است.

**گام چهارم:** مورد «ت» درست است.

$$v_{av}=\frac{v_{\circ}+\circ}{۲}=\frac{v_{\circ}}{۲}\xrightarrow{v_{\circ A}=v_{\circ B}}(v_{av})_A=(v_{av})_B$$

## تست و پاسخ ۴۶

**در شکل زیر، جسم تحت تأثیر نیروی افقی $\vec{F}$ روی سطح افقی از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و در ۳s اول حرکت، ۱۰m جابه‌جا می‌شود. اگر به این جسم ساکن روی همین سطح، نیروی $۲\vec{F}$ وارد شود، در ۳s اول حرکت چند متر جابه‌جا می‌شود؟ $(g=۱۰\,N/kg)$**




۱) ۱۴/۵
۲) ۲۰
۳) ۲۹
۴) ۴۰

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**خودت حل کنی بهتره** ابتدا شتاب حرکت را با استفاده از رابطهٔ $\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_{\circ}t$ به دست آورید. سپس به کمک قانون دوم نیوتون و شتاب به‌دست‌آمده در این مرحله، نیروی F را برحسب جرم مشخص کنید.

در مرحلهٔ دوم که نیروی $۲F$ وارد شده است، ابتدا شتاب را به کمک قانون دوم نیوتون به دست آورده و سپس رابطهٔ $\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_{\circ}t$ را به کار ببرید تا جابه‌جایی در مدت ۳s را در این حالت محاسبه کنید.

**درس‌نامه** ۱) طبق قانون دوم نیوتون، اگر نیروی خالص وارد بر جسم $(F_{net})$ مخالف صفر باشد. جسم در جهت نیروی خالص، شتاب a را می‌گیرد که اندازهٔ این شتاب با بزرگی نیرو رابطهٔ مستقیم و با جرم جسم رابطهٔ عکس دارد.

$$F_{net}=ma$$

۲) اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی $(f_k)$، از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

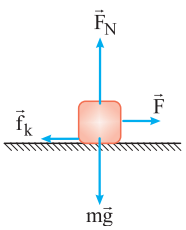
$$f_k=\mu_k+F_N$$

$\mu_k$ = ضریب اصطکاک جنبشی  $F_N$ = نیروی عمودی سطح (N)

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** باتوجه به این‌که در ۳s اول حرکت جسم با شتاب ثابت، به اندازهٔ ۱۰m جابه‌جا شده است، شتاب متحرک را در این حالت (تحت تاثیر نیروی F) به دست می‌آوریم.

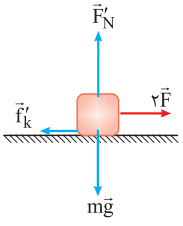
$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_{\circ}t\xrightarrow{v_{\circ}=\circ}۱\circ=\frac{۱}{۲}a(۳)^۲\Rightarrow a=\frac{۲\circ}{۹}m/s^۲$$

**گام دوم:** مطابق شکل زیر در حالتی که جسم تحت تأثیر نیروی F قرار دارد، شتاب حرکت جسم $\frac{۲\circ}{۹}m/s^۲$ است؛ حال به کمک قانون دوم نیوتون، نیروی F را به دست می‌آوریم:




$$F_{net,y}=\circ\Rightarrow F_N-mg=\circ\Rightarrow F_N=mg$$
$$F_{net,x}=ma\Rightarrow F-f_k=ma$$
$$F-\mu_k(mg)=ma$$
$$F=ma+\mu_k(mg)$$
$$F=m(\frac{۲\circ}{۹})+\circ/۲(۱\circ m)=\frac{۳۸}{۹}m$$

**گام سوم:** شکل زیر وضعیتی را که جسم تحت تأثیر نیروی $۲F$ قرار دارد، نشان می‌دهد. به کمک قانون دوم نیوتون شتاب جسم را در این حالت به دست می‌آوریم:




$$F_{net,y}=\circ\Rightarrow F'_N-mg=\circ\Rightarrow F'_N=mg$$
$$F_{net,x}=ma'\Rightarrow ۲F-f'_k=ma'$$
$$۲(\frac{۳۸}{۹}m)-\mu_k(mg)=ma'$$
$$\frac{۷۶}{۹}m-\circ/۲(۱\circ m)=ma'\Rightarrow a'=\frac{۵۸}{۹}m/s^۲$$

**گام چهارم:** حال جابه‌جایی جسمی ساکن که با شتاب ثابت $\frac{۵۸}{۹}\,m/s^۲$ شروع به حرکت می‌کند را پس از ۳s به دست می‌آوریم.

$$\Delta x' = \frac{۱}{۲}a't^۲ + v_۰t \xrightarrow{v_۰=۰} \Delta x' = \frac{۱}{۲}(\frac{۵۸}{۹})(۳)^۲ + ۰ = ۲۹m$$

## تست و پاسخ ۴۷

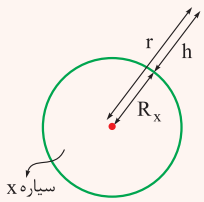
**جرم سیاره‌ای با جرم کرهٔ زمین برابر و حجم آن ۲۷ برابر حجم کرهٔ زمین است. شتاب گرانش در سطح این سیاره با شتاب گرانش در چه فاصله‌ای از سطح زمین برابر است؟ ($R_e$ شعاع کرهٔ زمین است.)**

۱) $۲Re$ ۲) $۳Re$ ۳) $۸Re$ ۴) $۹Re$

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**خودت حل کنی بهتره** باتوجه به نسبت حجم دو سیاره، نسبت شعاع دو سیاره را به دست آورید و در نهایت از رابطهٔ $g = \frac{GM_{سیاره}}{r^۲}$، شتاب گرانش در فاصلهٔ h از سطح زمین را با شتاب گرانش بر روی سطح سیاره برابر قرار دهید تا ارتفاع h به دست آید.

**درس نامه** اگر جسمی در فاصلهٔ r از مرکز یک سیاره به جرم M قرار گیرد، شتاب گرانشی‌ای که سیاره به آن جسم وارد می‌کند از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.




$$g = \frac{GM_{سیاره}}{r^۲} = \frac{GM_{سیاره}}{(R_x+h)^۲}$$

(g: شتاب گرانش در فاصلهٔ r از مرکز سیاره)

G = ثابت گرانش عمومی که برابر با $۶/۶۷\times۱۰^{-۱۱}\,\frac{N.m^۲}{kg^۲}$ است.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** حجم سیاره ۲۷ برابر حجم کرهٔ زمین است، شعاع سیاره ($R_x$) را برحسب شعاع زمین ($R_e$) به دست می‌آوریم.

$$V_x = ۲۷V_e \Rightarrow \frac{۴}{۳}\pi R_x^۳ = ۲۷\times\frac{۴}{۳}\pi R_e^۳ \Rightarrow R_x^۳ = ۲۷R_e^۳ \Rightarrow R_x = ۳R_e$$

**گام دوم:** شتاب گرانش در سطح سیاره را برحسب جرم و شعاع سیاره مشخص می‌کنیم:

$$g_x = \frac{GM_x}{R_x^۲}$$

**گام سوم:** شتاب گرانش در فاصلهٔ h از سطح زمین را برحسب جرم و شعاع زمین مشخص می‌کنیم:

$$g_h = \frac{GM_e}{(R_e+h)^۲}$$

**گام چهارم:** شتاب گرانش در فاصلهٔ h از سطح زمین و شتاب گرانش در سطح سیاره برابر است؛ بنابراین داریم:

$$g_h = g_x \Rightarrow \frac{GM_x}{R_x^۲} = \frac{GM_e}{(R_e+h)^۲} \xrightarrow{M_e=M_x,\,R_x=۳R_e} \frac{۱}{(۳R_e)^۲} = \frac{۱}{(R_e+h)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} ۳R_e = R_e + h \Rightarrow h = ۲R_e$$

## تست و پاسخ ۴۸

**متحرکی با تندی ثابت روی محیط دایره‌ای در حال حرکت است. اگر دورهٔ تناوب متحرک برابر با ۴s باشد، اندازهٔ شتاب متوسط متحرک در هر ثانیه، چند برابر اندازهٔ شتاب مرکزگرای آن است؟**

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{\pi}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{\pi}$ ۳) $\frac{۴}{\pi}$ ۴) $\frac{۴\sqrt{۲}}{\pi}$

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**خودت حل کنی بهتره** ابتدا به کمک رابطهٔ $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ شتاب متوسط را در بازهٔ زمانی $\Delta t=1s$ به دست آورید. (برای محاسبهٔ $\Delta v$ توصیه می‌کنیم شکل رسم کنید و به $\Delta v$ نگاه برداری داشته باشید نه نرده‌ای)، سپس از رابطهٔ $a_c=\frac{v^2}{r}$ شتاب مرکزگرا را محاسبه کنید. نسبت این دو شتاب به راحتی قابل محاسبه است. از رابطهٔ $v=\frac{2\pi r}{T}$ هم برای محاسبهٔ تندی استفاده کنید.

**درس نامه** در حرکت دایره‌ای یکنواخت، اگرچه تندی ثابت است اما جهت سرعت در حال تغییر است و حرکت از نوع شتابدار محسوب می‌شود.

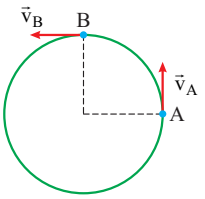
در حرکت دایره‌ای یکنواخت پس از مدت‌زمان $T$ (دورهٔ تناوب)، ذره یک دور کامل محیط دایره $(2\pi r)$ را طی می‌کند؛ بنابراین تندی در این نوع حرکت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$v=\frac{2\pi r}{T}$$

جهت شتاب لحظه‌ای در حرکت دایره‌ای یکنواخت همواره به سمت مرکز دایره است و این شتاب مرکزگرا از روابط زیر به دست می‌آید.

$$a_c=\frac{v^2}{r}=\frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

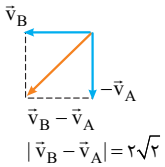
**پاسخ تشریحی** **گام اول:** باتوجه به این‌که دورهٔ تناوب متحرک $4s$ است، در مدت‌زمان $1s$ متحرک، $\frac{1}{4}$ از محیط دایره را پیموده است. مانند شکل زیر که متحرک با تندی ثابت $v_A$ از نقطهٔ A تا نقطهٔ B، $\frac{1}{4}$ محیط دایره را پیموده است.




**گام دوم:** شتاب متوسط متحرک را در بازهٔ $1s$ (مسیر A تا B) به کمک رابطهٔ $\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ به دست می‌آوریم. *(هواستون باشه شتاب کمیتی برداری است و برای محاسبهٔ تغییرات سرعت هم باید نگاهمون برداری باشه.)*

$$\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}_B-\vec{v}_A}{\Delta t}=\frac{\vec{v}_B+(-\vec{v}_A)}{\Delta t}$$

$\vec{v}_B$ و $(-\vec{v}_A)$ را به صورت برداری با هم جمع می‌کنیم. *(هواستون باشه که تندی ثابته و اون رو $v$ فرض می‌کنیم.)*




$$a_{av}=\frac{|\vec{v}_B-\vec{v}_A|}{\Delta t}=\frac{v\sqrt{2}}{1}=v\sqrt{2}$$

**گام سوم:** شتاب مرکزگرا را از رابطهٔ $a_c=\frac{v^2}{r}$ به دست می‌آوریم. *(توجه کن که اندازهٔ شتاب مرکزگرا ثابته!)*

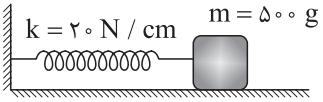
$$a_c=\frac{v^2}{r}$$

**گام چهارم:** نسبت بزرگی شتاب متوسط در هر ثانیه *(اونی که توگام دوم حساب کردیم)* را به شتاب مرکزگرا به دست می‌آوریم.

$$\frac{a_{av}}{a_c}=\frac{v\sqrt{2}}{\frac{v^2}{r}}=\frac{r\sqrt{2}}{v}\xrightarrow{v=\frac{2\pi r}{T}}\frac{r\sqrt{2}}{\frac{2\pi r}{T}}=\frac{T\sqrt{2}}{2\pi}=\frac{4\sqrt{2}}{2\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

## تست و پاسخ ۴۹

**در شکل زیر، جسم متصل به فنر، روی سطح افقی بدون اصطکاک در حال نوسان است. اگر مسافت طی‌شده توسط جسم در مدت $0/05s$ برابر با $10cm$ باشد، بیشینهٔ اندازهٔ تکانهٔ جسم در SI کدام است؟ $(\pi^2\simeq 10)$**




۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\pi$ ۴) $2\pi$

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**مشاوره** در حل سؤال‌های حرکت هماهنگ ساده، بازه‌های زمانی را برحسب دورهٔ تناوب مشخص کنید تا بتوانید تحلیل درستی از حرکت داشته باشید.

**خودت حل کنی بهتره** ابتدا دورهٔ تناوب را از رابطهٔ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ به دست آورید و پس از مشخص‌کردن نسبت $\Delta t$ به $T$، رابطه‌ای بین مسافت و دامنه بیابید و در نهایت بیشینهٔ تکانه را به کمک رابطهٔ $p_{max} = mA\omega$ به دست آورید.

**درس‌نامه** در حرکت هماهنگ سادهٔ سامانهٔ جرم ـ فنر، که جسمی به جرم $m$ به فنری با ضریب ثابت $k$ وصل شده است، دورهٔ تناوب $(T)$ و بسامد زاویه‌ای $(\omega)$ از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow \text{دورهٔ تناوب (s)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \text{بسامد زاویه‌ای (rad/s)}$$

در حرکت هماهنگ ساده در هر بازهٔ زمانی دلخواه $\Delta t = \frac{T}{2}$، نوسانگر مسافت $2A$ را می‌پیماید. به عبارتی اگر $\Delta t$ مضرب صحیحی از $\frac{T}{2}$ باشد، مسافت هم همان مضرب صحیح از $2A$ خواهد بود.

$$\Delta t = n\left(\frac{T}{2}\right) \Leftrightarrow \ell = n(2A)$$

بیشینهٔ تندی نوسانگر هماهنگ ساده، هنگام عبور از نقطهٔ تعادل رخ می‌دهد و بزرگی آن برابر با $v_{max} = A\omega$ است.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** دورهٔ تناوب نوسانگر جرم ـ فنر را از رابطهٔ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ به دست می‌آوریم.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \xrightarrow[k=20\frac{N}{cm}=2000\frac{N}{m}]{m=0/5kg} T = 2\pi\sqrt{\frac{0/5}{2000}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{4000}} \xrightarrow{\pi^2=10} T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{400\pi^2}} = \frac{2\pi}{20\pi} = 0/1s$$

**گام دوم:** نسبت بازهٔ زمانی $0/05s$ را به دورهٔ تناوب مشخص می‌کنیم تا بتوانیم مسافت پیموده‌شده را برحسب دامنه بیان کنیم.

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{0/05}{0/1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2}$$

نوسانگر هماهنگ ساده در هر بازهٔ دلخواه $\Delta t = \frac{T}{2}$، مسافتی به اندازهٔ $2A$ را طی می‌کند؛ بنابراین $10cm$ معادل $2A$ است.

$$2A = 10cm \Rightarrow A = 5cm = 0/05m$$

**گام سوم:** بیشینهٔ اندازهٔ تکانه جسم در حرکت هماهنگ ساده، هنگام عبور از نقطهٔ تعادل رخ می‌دهد؛ بنابراین داریم:

$$p_{max} = mv_{max} \xrightarrow{v_{max}=A\omega} p_{max} = mA\omega \xrightarrow{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}} p_{max} = mA\sqrt{\frac{k}{m}} = A\sqrt{km}$$

$$p_{max} = A\sqrt{km} = 0/05\sqrt{2000\times 0/5} = \frac{5}{100}\sqrt{1000} = \frac{50\sqrt{10}}{100} = \frac{\sqrt{10}}{2} \xrightarrow{\pi^2=10} \frac{\pi}{2}kg.m/s$$

## تست و پاسخ ۵۰

**نخی به طول $100cm$ را به دو قسمت غیرمساوی تقسیم کرده و با هر قسمت یک آونگ ساده می‌سازیم. اگر دورهٔ تناوب یکی از این آونگ‌ها ۳ برابر دورهٔ تناوب آونگ دیگر باشد، طول نخ آونگی که بسامد بیشتری دارد، چند سانتی‌متر است؟**

۱) ۱۰
۲) ۲۵
۳) ۷۵
۴) ۹۰

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**درس‌نامه** اگر یک آونگ ساده را اندکی از حالت تعادل خارج کرده و رها کنیم تا شروع به نوسان کند، دورهٔ تناوب نوسان آونگ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \leftarrow \text{دورهٔ تناوب (s)} \quad \frac{L \rightarrow \text{طول نخ آونگ (m)}}{g \rightarrow \text{شتاب گرانش (m/s}^2\text{)}}$$

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** طبق رابطهٔ $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ باتوجه به یکسان‌بودن شتاب گرانش $(g)$ برای هر دو آونگ، دورهٔ تناوب با جذر طول آونگ رابطهٔ مستقیم دارد؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \xrightarrow{T_2 = 3T_1} 3 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \Rightarrow \frac{L_2}{L_1} = 9$$

**گام دوم:** حالا با داشتن مجموع طول نخ‌ها و نسبت طول آن‌ها، طول هریک از نخ‌ها را حساب می‌کنیم:

$$L_1 + L_2 = 100 \xrightarrow{\frac{L_2}{L_1} = 9 \Rightarrow L_2 = 9L_1} L_1 + 9L_1 = 100 \Rightarrow 10L_1 = 100 \Rightarrow L_1 = 10\,cm$$

**گام سوم:** می‌دانیم بسامد با دورهٔ تناوب رابطهٔ عکس دارد؛ بنابراین $f_1 = 3f_2$ است، پس طول نخ آونگی که بسامد بیشتری دارد، همان $L_1 = 10\,cm$ است.

## تست و پاسخ ۵۱

**اگر با ورود یک موج الکترومغناطیسی به بسامد ۶۲۵ THz از محیط I به محیط R، طول موج آن ۱۶۰nm کاهش یابد، تندی انتشار آن چند متر بر ثانیه و چگونه تغییر می‌کند؟**

۱) $10^7$، کاهش می‌یابد. ۲) $10^7$، افزایش می‌یابد. ۳) $10^8$، کاهش می‌یابد. ۴) $10^8$، افزایش می‌یابد.

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**درس‌نامه** رابطهٔ طول موج و تندی انتشار موج در یک محیط معین به صورت زیر است:

$$\lambda = \frac{v}{f} \leftarrow \text{طول موج (m)} \quad \frac{v \rightarrow \text{تندی انتشار (m/s)}}{f \rightarrow \text{بسامد (Hz)}}$$

**پاسخ تشریحی** طبق رابطهٔ $\lambda = \frac{v}{f}$ و باتوجه به ثابت‌بودن بسامد موج در اثر شکست، می‌توانیم بنویسیم:

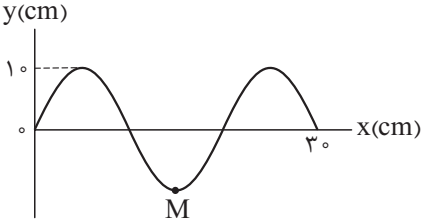
$$\begin{cases} \lambda_I = \frac{v_I}{f} \\ \lambda_R = \frac{v_R}{f} \end{cases} \Rightarrow \lambda_R - \lambda_I = \frac{v_R}{f} - \frac{v_I}{f} = \frac{v_R - v_I}{f}$$

$$\xrightarrow[f = 625\,THz = 625\times10^{12}\,Hz]{\lambda_R - \lambda_I = -160\,nm = -160\times10^{-9}\,m} -160\times10^{-9} = \frac{v_R - v_I}{625\times10^{12}} \Rightarrow v_R - v_I = -10^8\ m/s$$

بنابراین در اثر ورود موج از محیط I به محیط R، تندی انتشار موج، $10^8\ m/s$ کاهش می‌یابد.

## تست و پاسخ ۵۲

**تصویر موج عرضی منتشرشده در ریسمانی به چگالی خطی جرم $50\ g/m$، در لحظهٔ $t = 0$ به شکل زیر است. اگر نیروی کشش ریسمان برابر $5N$ باشد، حرکت ذرهٔ M از ریسمان در بازهٔ زمانی $t_1 = 0/01s$ تا $t_2 = 0/035s$، به مدت چند میلی‌ثانیه تندشونده است؟**



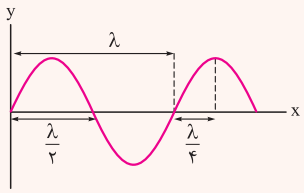

۱) ۵
۲) ۱۰
۳) ۱۵
۴) ۲۵

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

## درس‌نامه

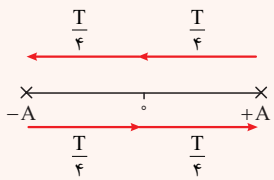
۱) تندی انتشار موج عرضی در یک ریسمان تحت کشش با نیروی $F$ و چگالی خطی جرم $\mu$ از رابطهٔ $v=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ به دست می‌آید.

۲) با توجه به شکل زیر، در نمودار $y-x$ برای موج عرضی، طول موج $(\lambda)$ به دست می‌آید:

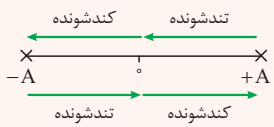



۳) دورهٔ تناوب یک موج با طول موج $\lambda$ و تندی انتشار $v$ از رابطهٔ $T=\frac{\lambda}{v}$ به دست می‌آید.

۴) در یک حرکت هماهنگ ساده، نوسانگر در مدت‌زمان $\frac{T}{4}$ از مکان صفر به $+A$ یا $-A$ می‌رود و یا از مکان $\pm A$ به صفر می‌رود. به شکل زیر دقت کنید.



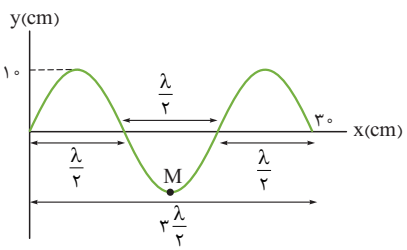

۵) مطابق شکل زیر، هرگاه نوسانگر به نقطهٔ تعادل نزدیک شود، حرکت تندشونده و هرگاه از نقطهٔ تعادل دور شود، حرکت کندشونده است.




**پاسخ تشریحی** **گام اول:** تندی انتشار موج عرضی در ریسمان را حساب می‌کنیم.

$$v=\sqrt{\frac{F}{\mu}} \xrightarrow[\mu=۵۰g/m=۰/۰۵kg/m]{F=۵N} v=\sqrt{\frac{۵}{۰/۰۵}}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰m/s$$

**گام دوم:** طول موج $(\lambda)$ را به دست می‌آوریم:




$$\frac{۳\lambda}{۲}=۳۰\Rightarrow\lambda=۲۰cm$$

**گام سوم:** دورهٔ تناوب موج را محاسبه می‌کنیم:

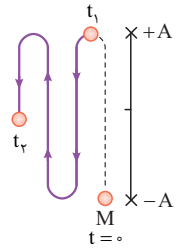
$$T=\frac{\lambda}{v}\xrightarrow[v=۱۰m/s]{\lambda=۲۰cm=۰/۲m} T=\frac{۰/۲}{۱۰}=۰/۰۲s$$

**گام چهارم:** لحظات $t_1$ و $t_2$ را برحسب دورهٔ تناوب حساب می‌کنیم:

$$\frac{t_1}{T}=\frac{۰/۰۱}{۰/۰۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow t_1=\frac{T}{۲}$$

$$\frac{t_2}{T}=\frac{۰/۰۳۵}{۰/۰۲}=\frac{۳۵}{۲۰}=\frac{۷}{۴}\Rightarrow t_2=\frac{۷T}{۴}$$

**گام پنجم:** مسیر حرکت ذرهٔ M از $t_1$ تا $t_2$ را رسم می‌کنیم:

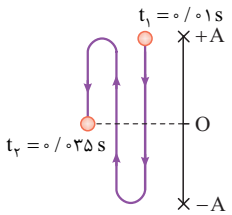



$$t_1 = ۰/۰۱\,s = \frac{T}{۲}$$

$$t_2 = ۰/۰۳۵\,s = \frac{۷T}{۴}$$

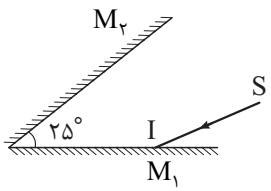
**گام ششم:** باتوجه به مسیر حرکت، مدت‌زمان حرکت تندشونده را برای ذرهٔ M به دست می‌آوریم:

با توجه به شکل زیر که مسیر حرکت را نشان می‌دهد به مدت $\Delta t = \frac{۳}{۴}\overbrace{T}^{۰/۰۲\,s} = ۰/۰۱۵\,s = ۱۵\,ms$ حرکت ذرهٔ M تندشونده است.




## تست و پاسخ ۵۳

**در شکل زیر پرتوی نور SI با زاویهٔ تابش ۵۵° به آینهٔ $M_1$ می‌تابد. پرتوی بازتاب‌شده از آینهٔ $M_2$، در آخرین بازتاب ممکن از این آینه، با پرتوی SI زاویهٔ چند درجه می‌سازد؟ (طول آینه‌ها به اندازهٔ کافی بلند است.)**




۱) ۱۰۵

۲) ۱۳۵

۳) ۱۵۰

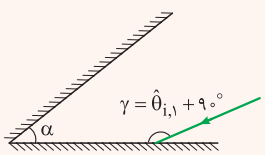
۴) ۱۸۰

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**مشاوره** *درسته فیزیک مفهومیه ولی یه جاهایی باید واقع‌بین باشی. توی این سؤال اگه فرمولایی که توی نکته‌ها آوردیم یاد نگیری، کلاً باید قید جواب‌دادنشو بزنی. پس بدو برو یاد بگیر!*

### درس‌نامه

۱) هرگاه یک پرتوی نور به یکی از دو آینهٔ تخت متقاطع که با هم زاویه حاده می‌سازند بتابد، برای محاسبهٔ تعداد بازتاب‌های پرتو از آینه‌ها، مطابق الگوریتم زیر پیش می‌رویم. باتوجه به شکل زیر داریم:

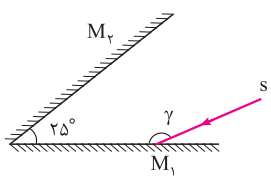



نسبت $\frac{\gamma}{\alpha}$ را به دست می‌آوریم
- $\frac{\gamma}{\alpha}$ عدد صحیح است. ← $n = \frac{\gamma}{\alpha}$
- $\frac{\gamma}{\alpha}$ عدد صحیح نیست. ← $n = \left[\frac{\gamma}{\alpha}\right] + ۱$

۲) وقتی یک پرتو به مجموعهٔ دو آینهٔ تخت که با هم زاویهٔ حاده می‌سازند وارد می‌شود، در اثر برخورد به مجموعهٔ آینه‌ها منحرف می‌شود و زاویهٔ انحراف پرتوی بازتاب nام نسبت به پرتوی تابش اولیه برابر است با: $D = n\alpha$ ← زاویهٔ انحراف ، زاویهٔ بین دو آینه →

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** تعداد برخورد پرتو به آینه‌ها (تعداد بازتاب) را به دست می‌آوریم.

با توجه به شکل زیر داریم:




$$\gamma = \underbrace{\hat{\theta}_{i,1}}_{۵۵} + ۹۰^\circ = ۵۵^\circ + ۹۰^\circ = ۱۴۵^\circ$$

$$\alpha = ۲۵^\circ$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{۱۴۵^\circ}{۲۵^\circ} = ۵/۸\,(\text{عدد صحیح نیست}) \Rightarrow n = \left[\frac{\gamma}{\alpha}\right] + ۱ = \underbrace{[۵/۸]}_{۵} + ۱ = ۶$$

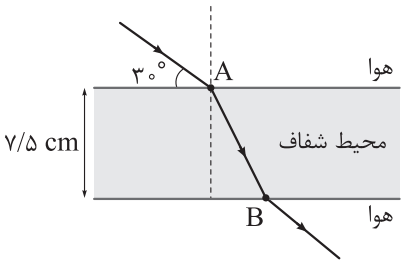
**گام دوم:** با توجه به این‌که برخوردهای فرد مربوط به آینهٔ $M_1$ و برخوردهای زوج مربوط به آینهٔ $M_2$ است، درمی‌یابیم در برخورد ۶اُم (زوج) پرتو پس از بازتاب از آینهٔ $M_2$ از مجموعهٔ آینه‌ها خارج می‌شود.

**گام سوم:** زاویهٔ انحراف پرتوی نهایی، نسبت به پرتوی اولیه را حساب می‌کنیم.

$$D = n\alpha \xrightarrow[\alpha = 25^\circ]{n=6} D = 6 \times 25^\circ = 150^\circ$$

## تست و پاسخ ۵۴

**مسیر حرکت پرتوی نوری در یک محیط شفاف به ضریب شکست n به شکل زیر است. اگر نور فاصلهٔ دو نقطهٔ A تا B را در مدت ۰/۵ns طی کند، n برابر کدام است؟ ($c = 3\times10^8 m/s$ ، $\sin 37^\circ = 0/6$)**




۱) $\sqrt{3}$

۲) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$

۳) $\frac{5\sqrt{3}}{8}$

۴) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**مشاوره** *مشابه این سؤال در کنکورهای قبلی، مطرح شده و تیپ مهمی از تست‌ها به شمار می‌رود.*

### درس‌نامه

**قانون شکست اسنل:** هنگامی که نور به طور مایل از یک محیط شفاف وارد محیط شفاف دیگری می‌شود رابطهٔ زیر برقرار است:

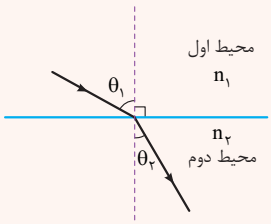
$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$$

$n_1$ = ضریب شکست محیط اول

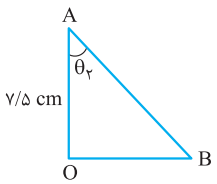
$n_2$ = ضریب شکست محیط دوم

$\theta_1$ = زاویهٔ تابش

$\theta_2$ = زاویهٔ شکست




**پاسخ تشریحی** **گام اول:** با توجه به شکل زیر فاصلهٔ AB را برحسب زاویهٔ $\theta_2$ به دست می‌آوریم.

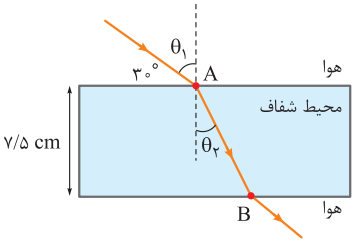



$$\cos\theta_2 = \frac{7/5}{d_{AB}} \Rightarrow d_{AB} = \frac{7/5}{\cos\theta_2}\,cm \quad (1)$$

**گام دوم:** فاصلهٔ AB را به کمک تندی و زمان حساب می‌کنیم:

$$d_{AB} = v_2 . \Delta t \xrightarrow[c=3\times10^8\,m/s,\ \Delta t=0/5\,ns=0/5\times10^{-9}\,s]{v_2=\frac{c}{n}} d_{AB} = \frac{3\times10^8}{n} \times 0/5\times10^{-9} = \frac{0/15}{n}(m) = \frac{15}{n}cm \quad (2)$$

**گام سوم:** رابطه‌ای بین $n$ و $\theta_2$ به دست می‌آوریم. به شکل زیر دقت کنید. طبق قانون شکست اسنل داریم:




$$\frac{n_2}{n_1}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\xrightarrow[n_1=1,\,n_2=n]{\theta_1=90^\circ-30^\circ=60^\circ}\frac{n}{1}=\frac{\sin 60^\circ}{\sin\theta_2}\Rightarrow n=\frac{\sqrt{3}}{2\sin\theta_2}\quad(3)$$

**گام چهارم:** از ترکیب روابط (۲) و (۳) داریم:

$$d_{AB}=\frac{15}{n}\xrightarrow{n=\frac{\sqrt{3}}{2\sin\theta_2}}d_{AB}=\frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2\sin\theta_2}}=\frac{30\sin\theta_2}{\sqrt{3}}\,cm\quad(4)$$

**گام پنجم:** از ترکیب روابط (۱) و (۴)، $\theta_2$ را به دست می‌آوریم:

$$d_{AB}=\frac{7/5}{\cos\theta_2}=\frac{30\sin\theta_2}{\sqrt{3}}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{4}=\sin\theta_2\times\cos\theta_2$$

$$\xrightarrow{\sin\theta_2\cdot\cos\theta_2=\frac{1}{2}\sin 2\theta_2}\frac{1}{2}\sin 2\theta_2=\frac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow\sin 2\theta_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 2\theta_2=60^\circ\Rightarrow\theta_2=30^\circ$$

**گام ششم:** ضریب شکست محیط شفاف را حساب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(3)}n=\frac{\sqrt{3}}{2\sin\theta_2}\xrightarrow{\sin\theta_2=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}}n=\frac{\sqrt{3}}{2\times\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

## تست و پاسخ ۵۵

**در شکل زیر، تاری بین دو تکیه‌گاه محکم شده و در هماهنگ اول خود به نوسان در آمده است. اگر طول تار ۴۰cm و تندی انتشار موج عرضی در تار $120\ m/s$ باشد، ذرات تار در هر دقیقه چند نوسان انجام می‌دهند؟**

۱) $1/5\times10^2$ ۲) $1/8\times10^3$ ۳) $9\times10^3$ ۴) $1/8\times10^4$

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**مشاوره** *این قسمت از اون بخش‌های آسونه که معمولاً ردّ پاش توی دفترچهٔ کنکور دیده می‌شه. نگی نگفتیا!*

**خودت حل کنی بهتره** اول بسامد هماهنگ اول رو حساب کن. بعدش از روی رابطهٔ بسامد با تعداد نوسان، تعداد نوسان رو به دست بیار.

**درس نامه**

بسامد هماهنگ اول در تاری به طول $L$ از رابطهٔ $f_1=\frac{v}{2L}$ به دست می‌آید.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** بسامد تار را حساب می‌کنیم.

$$f_1=\frac{v}{2L}\xrightarrow[L=40cm=0/4m]{v=120m/s}f_1=\frac{120}{2\times0/4}=150Hz$$

**گام دوم:** تعداد نوسان‌ها در مدت یک دقیقه را حساب می‌کنیم:

$$f=\frac{N}{t}\xrightarrow[t=60s]{f=150Hz}150=\frac{N}{60}\Rightarrow N=150\times60=9000=9\times10^3$$

## تست و پاسخ ۵۶

**در اتم هیدروژن، الکترون در دومین حالت برانگیخته قرار دارد. با در نظر گرفتن گذارهای ممکن، بیشترین بسامد گسیلی توسط این الکترون، چند برابر بیشترین بسامد جذبی آن است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۸

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**مشاوره** *جدیداً طراح کنکور بسیار علاقه‌منده از بسامد گسیلی سؤال بده. حتماً فرمولی که به صورت نکته توی پاسخ نوشته شده رو یاد بگیر.*

**درس‌نامه**

۱) در اتم هیدروژن اگر الکترون در $k$اُمین حالت برانگیخته باشد، شمارهٔ مدار آن $n = k + 1$ است.

۲) بسامد گسیلی و جذبی در اثر گذار بین دو مدار $n_L$ و $n_u$ از رابطهٔ $f = Rc(\frac{1}{n_L^2} - \frac{1}{n_u^2})$ به دست می‌آید.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** شمارهٔ مدار الکترون را به دست می‌آوریم که برابر با $n = 2 + 1 = 3$ است.

**گام دوم:** گذاری که منجر به بیشترین بسامد گسیلی و بیشترین بسامد جذبی الکترون می‌شود را به دست می‌آوریم. بیشترین بسامد گسیلی، در اثر گذار به مدار $n = 1$ است. از طرفی بیشترین بسامد جذبی، در اثر گذار به مدار $n = \infty$ است.

**گام سوم:** بیشترین بسامد گسیلی و بیشترین بسامد جذبی را برای الکترونی که در مدار $n = 3$ است حساب می‌کنیم:

$$3 \to 1 : f_{\text{گسیلی}} = Rc(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}) = \frac{8}{9}Rc$$

$$3 \to \infty : f_{\text{جذبی}} = Rc(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{\infty^2}) = \frac{1}{9}Rc$$

**گام چهارم:** نسبت $\frac{f_{\text{گسیلی}}}{f_{\text{جذبی}}}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{f_{\text{گسیلی}}}{f_{\text{جذبی}}} = \frac{\frac{8}{9}Rc}{\frac{1}{9}Rc} = 8$$

## تست و پاسخ ۵۷

**از طیف گسیلی اتم هیدروژن، طول موج مربوط به کدام یک از خط‌های زیر برابر $\frac{8}{15}\mu m$ است؟ $(R = 0/01\,(nm)^{-1})$**

۱) اولین خط رشتهٔ بالمر $(n' = 2)$ ۲) دومین خط رشتهٔ بالمر $(n' = 2)$

۳) اولین خط رشتهٔ پاشن $(n' = 3)$ ۴) دومین خط رشتهٔ پاشن $(n' = 3)$

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**درس‌نامه**

طول موج خط‌های طیف اتمی هیدروژن از معادلهٔ ریدبرگ به دست می‌آیند:

$$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2})$$

$\lambda$ = طول موج (nm)

$n'$ = شمارهٔ مدار کوچک‌تر

$n$ = شمارهٔ مدار بزرگ‌تر

**پاسخ تشریحی** طبق معادلهٔ ریدبرگ داریم:

$$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}) \xrightarrow[R = 0/01\,(nm)^{-1}]{\lambda = \frac{8}{15}\mu m = \frac{8000}{15}nm} \frac{15}{8000} = \frac{1}{100}(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2})$$

$$\Rightarrow \frac{۱۵}{۸۰}=\left(\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{n^{۲}}\right)\Rightarrow \underbrace{\frac{۳}{۱۶}}_{\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۱۶}}=\frac{۱}{n'^{۲}}-\frac{۱}{n^{۲}}\Rightarrow \begin{cases} n'^{۲}=۴\Rightarrow n'=۲ \rightarrow \text{رشتهٔ بالمر} \\ n^{۲}=۱۶\Rightarrow n=۴ \end{cases}$$

$$\text{شمارهٔ خط}=n-n'\Rightarrow \text{شمارهٔ خط}=۴-۲=۲$$

بنابراین طول موج $\frac{۸}{۱۵}\mu m$ مربوط به دومین خط رشتهٔ بالمر است.

**حواستون باشه** توی معادلهٔ ریدبرگ حتماً حواست به یکاها باشد که وقتی R برحسب یکای $(nm)^{-۱}$ است باید $\lambda$ رو هم برحسب یکای nm بنویسی.

## تست و پاسخ ۵۸

**نیمه‌عمر یک مادهٔ پرتوزا برابر ۲min است. اگر نمونه‌ای از این ماده در لحظهٔ $t=۰$ شروع به واپاشی کند، در بازهٔ زمانی $t_۱=۶min$ تا $t_۲=۱۰min$ چند درصد از جرم اولیهٔ این نمونه واپاشیده می‌شود؟**

۱) ۳/۱۲۵ ۲) ۶/۲۵ ۳) ۹/۳۷۵ ۴) ۱۸/۷۵

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**مشاوره** آگه بگن زودبازده‌ترین مبحث فیزیک چیه، بهت میگم نیمه‌عمر. قسمتی که سؤالاش خیلی روتینه و به راحتی می‌تونی از پسش بربیای. پس این سؤالا رو خوب تحلیل کن،

**درس‌نامه**

۱) برای نمونه‌ای با نیمه‌عمر $T_{\frac{۱}{۲}}$ تعداد نیمه‌عمر در مدت‌زمان $t$ از رابطهٔ $n=\frac{t}{T_{\frac{۱}{۲}}}$ به دست می‌آید.

۲) درصد باقی‌مانده از نمونهٔ اولیه، بعد از $n$ نیمه‌عمر از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\text{درصد باقی‌مانده}=\frac{N}{N_۰}\times ۱۰۰=\frac{۱۰۰}{۲^{n}}$$

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا باید ببینیم در لحظات $t_۱$ و $t_۲$ چند نیمه‌عمر سپری شده است.

$$n_۱=\frac{t_۱}{T_{\frac{۱}{۲}}}\xrightarrow[T_{\frac{۱}{۲}}=۲min]{t_۱=۶min} n_۱=\frac{۶}{۲}=۳$$

$$n_۲=\frac{t_۲}{T_{\frac{۱}{۲}}}\xrightarrow[T_{\frac{۱}{۲}}=۲min]{t_۲=۱۰min} n_۲=\frac{۱۰}{۲}=۵$$

**گام دوم:** درصد نمونهٔ باقی‌مانده در لحظات $t_۱$ و $t_۲$ را حساب می‌کنیم.

$$\text{درصد باقی‌مانده در } t_۱=\frac{۱۰۰}{۲^{n_۱}}=\frac{۱۰۰}{۲^{۳}}=\frac{۱۰۰}{۸}=٪۱۲/۵$$

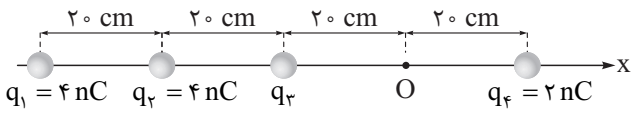
$$\text{درصد باقی‌مانده در } t_۲=\frac{۱۰۰}{۲^{n_۲}}=\frac{۱۰۰}{۲^{۵}}=\frac{۱۰۰}{۳۲}=٪۳/۱۲۵$$

**گام سوم:** درصد واپاشیده‌شده از $t_۱$ تا $t_۲$ را حساب می‌کنیم:

$$\text{درصد واپاشیده شده از } t_۱ \text{ تا } t_۲=\text{درصد باقی‌مانده در } t_۱-\text{درصد باقی‌مانده در } t_۲=۱۲/۵-۳/۱۲۵=٪۹/۳۷۵$$

## تست و پاسخ ۵۹

**در شکل زیر، چهار بار الکتریکی نقطه‌ای روی محور x ثابت شده‌اند. اگر میدان الکتریکی حاصل از این بارها در نقطهٔ O برابر با $\vec{E}=(۱۰۰\ N/C)\vec{i}$ باشد، نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۲$ در SI کدام است؟ $\left(k=۹\times ۱۰^{۹}\ \frac{N.m^{۲}}{C^{۲}}\right)$**




۱) $\vec{F}=(۲/۵\times ۱۰^{-۶})\vec{i}$ ۲) $\vec{F}=(-۲/۵\times ۱۰^{-۶})\vec{i}$ ۳) $\vec{F}=(۳/۳\times ۱۰^{-۶})\vec{i}$ ۴) $\vec{F}=(-۳/۳\times ۱۰^{-۶})\vec{i}$

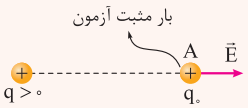
**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**درس‌نامه** **میدان الکتریکی**: اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از بار نقطه‌ای q در فاصلهٔ r از آن، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$E = k\frac{|q|}{r^2} \quad , \quad k = 9\times10^9 \left(\frac{N.m^2}{C^2}\right)$$

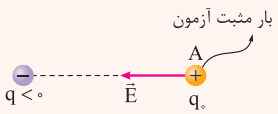
(N / C) اندازهٔ میدان الکتریکی ← E
اندازهٔ بار الکتریکی (C) ← |q|
ثابت کولن $\left(\frac{N.m^2}{C^2}\right)$
فاصله از بار (m) ← r

**جهت بردار میدان الکتریکی**: برای این‌که جهت بردار میدان الکتریکی در یک نقطه را مشخص کنیم، کافی است در آن نقطه یک بار مثبت آزمون قرار بدهیم. در این صورت، جهت میدان الکتریکی در آن نقطه، هم‌جهت با نیروی الکتریکی وارد بر بار مثبت آزمون است. در شکل‌های زیر جهت میدان الکتریکی حاصل از بارهای مثبت و منفی در نقطهٔ A مشخص شده‌اند.



(الف)

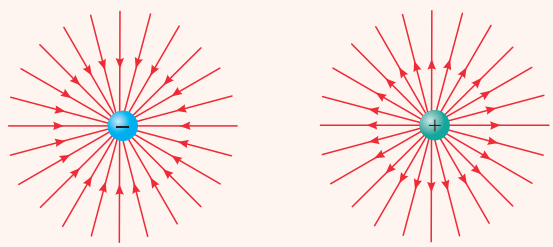
بار q بار آزمون $q_۰$ را به سمت راست دفع می‌کند؛ پس جهت $\vec{E}$ هم به سمت راست است.



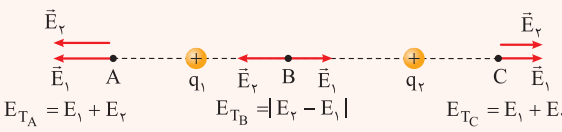
(ب)

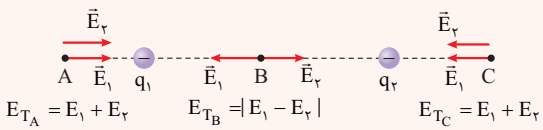
بار q بار آزمون $q_۰$ را به سمت چپ جذب می‌کند؛ پس جهت $\vec{E}$ هم به سمت چپ است.

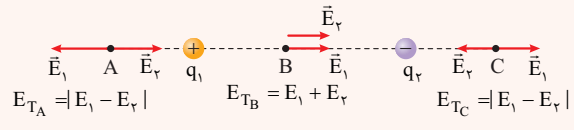
به طور کلی می‌توانیم بگوییم خطوط میدان الکتریکی از بارهای مثبت خارج (شکل پ) و به بارهای منفی وارد می‌شوند (شکل ت).


(ت) (پ)

**میدان الکتریکی خالص**: برای این‌که میدان الکتریکی خالص در یک نقطه را به دست آوریم، ابتدا باید بردار میدان الکتریکی حاصل از هر بار الکتریکی در آن نقطه را مشخص کنیم، سپس برآیند میدان‌ها در آن نقطه را حساب کنیم. در شکل‌های زیر، اندازهٔ میدان الکتریکی خالص $(E_T)$ در اطراف بارهای هم‌نام و ناهم‌نام را می‌بینید.

(ث)



(ج)



(چ)


قانون کولن: اگر بارهای $q_1$ و $q_2$ در فاصلهٔ $r$ از یکدیگر قرار بگیرند، اندازهٔ نیروی الکتریکی‌ای که به یکدیگر وارد می‌کنند، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

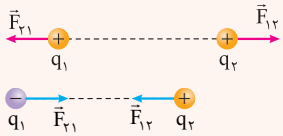
$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

($F$: اندازهٔ نیروی الکتریکی وارد بر هر بار (N)، $|q_1|$: بزرگی بار $q_1$ (C)، $|q_2|$: بزرگی بار $q_2$ (C)، $r$: فاصلهٔ بین دو بار (m))

$$k = 9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2}$$

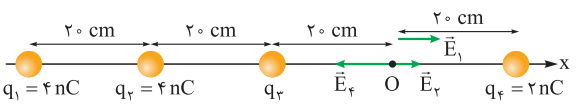
($k$: ثابت کولن)

برای تعیین جهت نیروهای الکتریکی وارد بر بارها، باید جاذبه یا دافعه بودن نیروها را بررسی کنیم. توجه داشته باشید که مطابق شکل‌های زیر بارهای هم‌نام یکدیگر را دفع و بارهای ناهم‌نام یکدیگر را جذب می‌کنند.



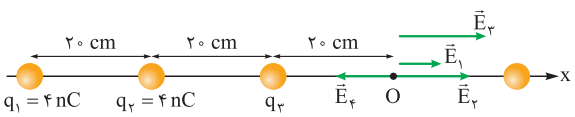

**پاسخ تشریحی** ابتدا میدان الکتریکی حاصل از بار $q_4$ در نقطهٔ $O$ را $E_4$ در نظر می‌گیریم و میدان الکتریکی حاصل از بارهای $q_1$ و $q_2$ در این نقطه را برحسب $E_4$ می‌نویسیم. سپس جهت هریک از میدان‌های الکتریکی در نقطهٔ $O$ را مشخص می‌کنیم (شکل الف).

$$E = k\frac{|q|}{r^2} \rightarrow \begin{cases} \frac{E_1}{E_4} = \left|\frac{q_1}{q_4}\right| \times \left(\frac{r_4}{r_1}\right)^2 = \frac{4}{2}\times\left(\frac{20}{60}\right)^2 = \frac{2}{9} \rightarrow E_1 = \frac{2}{9}E_4 \\ \frac{E_2}{E_4} = \left|\frac{q_2}{q_4}\right| \times \left(\frac{r_4}{r_2}\right)^2 = \frac{4}{2}\times\left(\frac{20}{40}\right)^2 = \frac{1}{2} \rightarrow E_2 = \frac{1}{2}E_4 \end{cases}$$



(الف)

با توجه به این‌که بردار میدان الکتریکی خالص در نقطهٔ $O$ برابر با $100\vec{i}$ است، پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که جهت میدان الکتریکی حاصل از بار $q_3$ در نقطهٔ $O$ ($\vec{E}_3$) در جهت محور $x$ است (شکل ب)؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:



(ب)

$$E_1 + E_2 + E_3 - E_4 = 100 \xrightarrow[E_2=\frac{1}{2}E_4]{E_1=\frac{2}{9}E_4} \frac{2}{9}E_4 + \frac{1}{2}E_4 + E_3 - E_4 = 100 \rightarrow E_3 - \frac{5}{18}E_4 = 100$$

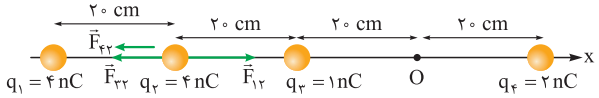
$$\xrightarrow{E=k\frac{|q|}{r^2}} k\frac{|q_3|}{r_3^2} - \frac{5}{18}k\frac{|q_4|}{r_4^2} = 100 \xrightarrow[q_4=2\times10^{-9}C,\ r_3=r_4=0/2m]{k=9\times10^9\ \frac{N.m^2}{C^2}} \frac{9\times10^9|q_3|}{4\times10^{-2}} - \frac{5}{18}\times9\times10^9\times\frac{2\times10^{-9}}{4\times10^{-2}} = 100$$

$$\Rightarrow \frac{9\times10^9|q_3|}{4\times10^{-2}} - 125 = 100 \rightarrow 9\times10^9|q_3| = 9 \xrightarrow{q_3>0} q_3 = 1nc$$

حالا همهٔ اطلاعات لازم برای محاسبهٔ نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۲$ را داریم. برای راحتی محاسبه، نیروی الکتریکی‌ای را که بار $q_۳$ به بار $q_۲$ وارد می‌کند، $F_{۳۲}$ در نظر می‌گیریم و بقیه نیروهای الکتریکی وارد بر بار $q_۲$ را برحسب $F_{۳۲}$ می‌نویسیم.

$$F=\frac{k|q_۱||q_۲|}{r^۲}\rightarrow\begin{cases}\frac{F_{۱۲}}{F_{۳۲}}=\left|\frac{q_۱}{q_۳}\right|\times(\frac{r_{۳۲}}{r_{۱۲}})^۲=\frac{۴}{۱}\times(\frac{۲۰}{۲۰})^۲=۴\rightarrow F_{۱۲}=۴F_{۳۲}\\ \frac{F_{۴۲}}{F_{۳۲}}=\left|\frac{q_۴}{q_۳}\right|\times(\frac{r_{۳۲}}{r_{۴۲}})^۲=\frac{۲}{۱}\times(\frac{۲۰}{۶۰})^۲=\frac{۲}{۹}\rightarrow F_{۴۲}=\frac{۲}{۹}F_{۳۲}\end{cases}$$

در آخر جهت نیروهای الکتریکی بر بار $q_۲$ را مشخص می‌کنیم و بردار نیروی الکتریکی خالص وارد بر بار $q_۲$ در SI را به دست می‌آوریم.




$$F_{net}=F_{۱۲}-F_{۳۲}-F_{۴۲}\xrightarrow[F_{۴۲}=\frac{۲}{۹}F_{۳۲}]{F_{۱۲}=۴F_{۳۲}}F_{net}=۴F_{۳۲}-F_{۳۲}-\frac{۲}{۹}F_{۳۲}=\frac{۲۵}{۹}F_{۳۲}$$

$$\xrightarrow[k=۹\times۱۰^۹\ \frac{N.m^۲}{C^۲},\ |q_۲|=۱۰^{-۹}C,\ |q_۲|=۴\times۱۰^{-۹}C]{F_{۳۲}=\frac{k|q_۳||q_۲|}{r_{۳۲}^۲},\ r_{۳۲}=۰/۲\ m}F_{net}=\frac{۲۵}{۹}\times۹\times۱۰^۹\times\frac{۱۰^{-۹}\times۴\times۱۰^{-۹}}{۴\times۱۰^{-۲}}=۲/۵\times۱۰^{-۶}N$$

$$\Rightarrow\vec{F}_{net}=۲/۵\times۱۰^{-۶}\vec{i}$$

## تست و پاسخ ۶۰

**یک ذره با بار الکتریکی q در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}=(۳\times۱۰^۵\ N/C)\vec{i}-(۴\times۱۰^۵\ N/C)\vec{j}$ از نقطهٔ A(۰,۲۰cm) به نقطهٔ B(۰,۸۰cm) جابه‌جا می‌شود. اگر در این جابه‌جایی انرژی پتانسیل الکتریکی ذره ۳۶۰mJ افزایش یابد، q برحسب میکروکولن کدام است؟**

۱) $+۱/۵$ ۲) $-۱/۵$ ۳) $+۲$ ۴) $-۲$

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**درس‌نامه** ۱) اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه از میدان الکتریکی، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$\Delta V=\frac{\Delta U_E}{q}$$

$\Delta V$: اختلاف پتانسیل الکتریکی (V)، $\Delta U_E$: تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی بار q (J)، q: بار الکتریکی (C)

*خواستون باشه! تو این رابطه باید بار q رو با علامتش بذارین.*

۲) اندازهٔ اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو نقطه از میدان الکتریکی یکنواخت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$|\Delta V|=Ed$$

$|\Delta V|$: اندازهٔ اختلاف پتانسیل (V)، E: میدان الکتریکی $(\frac{V}{m})$، d: فاصلهٔ بین دو نقطه در راستای میدان الکتریکی (m)

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** میدان الکتریکی داده‌شده یک مولفه در جهت محور x $(\vec{E}_x=۳\times۱۰^۵\ N/C\,\vec{i})$ و یک مؤلفه در خلاف جهت محور y $(\vec{E}_y=-۴\times۱۰^۵N/C\,\vec{j})$ دارد و ذره از نقطهٔ A(۰,۲۰cm) به نقطهٔ B(۰,۸۰cm) یعنی در جهت محور y و خلاف جهت $\vec{E}_y$ جابه‌جا می‌شود. باتوجه به این‌که با حرکت در خلاف جهت میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد، پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که در این جابه‌جایی ذره، پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$E=\frac{|\Delta V|}{d}\xrightarrow[d=۰/۶\ m]{E=۴\times۱۰^۵N/C}۴\times۱۰^۵=\frac{|\Delta V|}{۰/۶}\xrightarrow{\Delta V>۰}\Delta V=۲۴\times۱۰^۴\ V$$

**گام دوم:** حالا داده‌ها را در رابطهٔ زیر جای‌گذاری می‌کنیم و مقدار q را به دست می‌آوریم.

$$\Delta V=\frac{\Delta U}{q}\xrightarrow[\Delta U=۳۶۰\times۱۰^{-۳}J]{\Delta V=۲۴\times۱۰^{۴}V}۲۴\times۱۰^{۴}=\frac{۳۶۰\times۱۰^{-۳}}{q}\rightarrow q=۱/۵\times\underbrace{۱۰^{-۶}}_{\mu}C=۱/۵\mu C$$

## تست و پاسخ ۶۱

**اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازنی به ظرفیت $۵\mu F$ را ۲۰ درصد افزایش می‌دهیم. اگر با این کار انرژی ذخیره‌شده در آن $۰/۱۱\,mJ$ افزایش یابد، بار الکتریکی ذخیره‌شده در آن چند میکروکولن تغییر می‌کند؟**

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۵۰ ۴) ۱۰۰

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**درس‌نامه** ۱) انرژی ذخیره‌شده در خازن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$U=\frac{۱}{۲}CV^{۲}$$

(U: انرژی ذخیره‌شده در خازن (J)، C: ظرفیت خازن (F)، V: اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن (V))

۲) اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر خازن از $V_۱$ به $V_۲$ و بار الکتریکی روی صفحات آن از $Q_۱$ به $Q_۲$ برسد، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\Delta Q=C\Delta V$$

($\Delta Q$: تغییر بار الکتریکی (C)، C: ظرفیت خازن (F)، $\Delta V$: تغییر اختلاف پتانسیل الکتریکی (V))

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** سؤال به ما تغییرات اختلاف پتانسیل دو سر خازن و تغییرات انرژی ذخیره‌شده در آن را داده است؛ پس با استفاده از رابطهٔ $U=\frac{۱}{۲}CV^{۲}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$U_۲-U_۱=\frac{۱}{۲}CV_۲^{۲}-\frac{۱}{۲}CV_۱^{۲}=\frac{۱}{۲}C(V_۲^{۲}-V_۱^{۲})\xrightarrow[C=۵\times۱۰^{-۶}F,\,V_۲=V_۱+\frac{۲۰}{۱۰۰}V_۱=\frac{۶}{۵}V_۱]{U_۲-U_۱=۱۱\times۱۰^{-۵}J}$$

$$۱۱\times۱۰^{-۵}=\frac{۱}{۲}\times۵\times۱۰^{-۶}\left(\left(\frac{۶}{۵}V_۱\right)^{۲}-V_۱^{۲}\right)\rightarrow\frac{۱۱}{۲۵}V_۱^{۲}\times\frac{۵}{۲}=۱۱\Rightarrow V_۱^{۲}=۱۰۰\Rightarrow V_۱=۱۰V$$

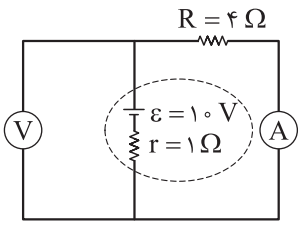
($\left(\frac{۶}{۵}V_۱\right)^{۲}-V_۱^{۲}=\frac{۳۶}{۲۵}V_۱^{۲}-V_۱^{۲}$)

**گام دوم:** در آخر، مقدار افزایش بار الکتریکی خازن در اثر افزایش اختلاف پتانسیل آن را به دست می‌آوریم:

$$\Delta Q=C\Delta V\xrightarrow[\Delta V=\frac{۱}{۵}V_۱,\,V_۱=۱۰V]{C=۵\times۱۰^{-۶}F}\Delta Q=۵\times۱۰^{-۶}\times\frac{۱}{۵}\times۱۰=۱۰\times\underbrace{۱۰^{-۶}}_{\mu}C=۱۰\mu C$$

## تست و پاسخ ۶۲

**در مدار شکل زیر اگر جای آمپرسنج آرمانی و ولت‌سنج آرمانی عوض شود، مقادیری که آن‌ها نشان می‌دهند به‌ترتیب از راست به چپ چند آمپر و چند ولت تغییر می‌کند؟**



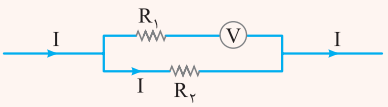

۱) ۲، ۸
۲) ۲، ۲
۳) ۸، ۸
۴) ۸، ۲

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**مشاوره** این سؤال مشابه سؤالی است که در کنکور تجربی ۱۴۰۲ مطرح شد.

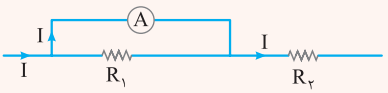
**درس‌نامه** جریان خروجی از باتری، از رابطهٔ روبه‌رو به دست می‌آید: $I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}$

۱) مقاومت ولت‌سنج آرمانی بی‌نهایت است و جریان الکتریکی از آن عبور نمی‌کند، پس از شاخه‌ای که ولت‌سنج آرمانی در آن قرار دارد نیز جریان الکتریکی عبور نمی‌کند. مثلاً در شکل (الف) تمام جریان $I$ از مقاومت $R_۲$ می‌گذرد و جریانی از $R_۱$ عبور نمی‌کند.



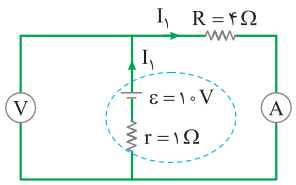
(الف)

۲) مقاومت آمپرسنج آرمانی صفر است؛ بنابراین آمپرسنج آرمانی در یک مدار الکتریکی مانند یک سیم رسانای بدون مقاومت عمل می‌کند و اختلاف پتانسیل دو سر آن و هر چیزی که با آن موازی است، صفر می‌شود. مثلاً در شکل (ب) اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت $R_۱$ صفر می‌شود و از $R_۱$ هیچ جریانی عبور نمی‌کند.



(ب)

**پاسخ تشریحی** مقاومت ولت‌سنج آرمانی بی‌نهایت است و از شاخه‌ای که ولت‌سنج آرمانی در آن قرار دارد، جریان الکتریکی عبور نمی‌کند؛ پس در حالت اول، تمام جریان الکتریکی از شاخهٔ سمت راست عبور می‌کند. (شکل الف). در این حالت، جریان الکتریکی عبوری از آمپرسنج را می‌توانیم با استفاده از رابطهٔ $I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}$ به دست بیاوریم.



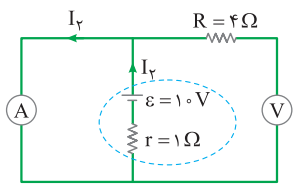
(الف)

$$I_۱=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}\xrightarrow[R_{eq}=۴\Omega,r=۱\Omega]{\varepsilon=۱۰V}I_۱=\frac{۱۰}{۴+۱}=۲A$$

در حالت اول، دو سر ولت‌سنج آرمانی به باتری وصل است و از آن‌جایی که ولت‌سنج آرمانی اختلاف پتانسیل دو سر خودش را نشان می‌دهد، پس در این حالت، ولت‌سنج آرمانی اختلاف پتانسیل دو سر باتری را نشان می‌دهد.

$$V_۱=\varepsilon-rI_۱\xrightarrow[r=۱\Omega,I_۱=۲A]{\varepsilon=۱۰V}V_۱=۱۰-۱\times۲=۸V$$

در حالت دوم، جای ولت‌سنج آرمانی و آمپرسنج آرمانی عوض می‌شود و باتوجه به این‌که مقاومت ولت‌سنج آرمانی بی‌نهایت است، پس جریان الکتریکی از شاخهٔ سمت راست عبور نمی‌کند و تمام جریان از شاخهٔ سمت چپ می‌گذرد (شکل ب).



(ب)

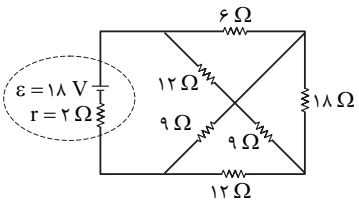
$$I_۲=\frac{\varepsilon}{R'_{eq}+r}\xrightarrow[R'_{eq}=۰\Omega,r=۱\Omega]{\varepsilon=۱۰V}I_۲=\frac{۱۰}{۰+۱}=۱۰A$$

باتوجه به این‌که از شاخهٔ سمت راست جریان الکتریکی عبور نمی‌کند، پس ولت‌سنج آرمانی اختلاف پتانسیل دو سر باتری را نشان می‌دهد. از طرفی مقاومت آمپرسنج آرمانی صفر است و در شاخه‌ای که قرار می‌گیرد، مانند یک سیم بدون مقاومت عمل می‌کند؛ بنابراین پتانسیل الکتریکی دو سر باتری یکسان و در نتیجه اختلاف پتانسیل دو سر آن صفر است. بنابراین، ولت‌سنج آرمانی در حالت دوم، مقدار صفر را نشان می‌دهد.

**نتیجه‌گیری کلی:** اگر جای آمپرسنج آرمانی و ولت‌سنج آرمانی عوض شود، مقداری که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد $(I_۲-I_۱=۱۰-۲)۸A$ و مقداری که ولت‌سنج آرمانی نشان می‌دهد، $(V_۱-V_۲=۸-۰)۸V$ تغییر می‌کند.

## تست و پاسخ ۶۳

**در مدار شکل زیر، توان مصرفی مقاومت ۱۸اُهمی و توان خروجی باتری، به‌ترتیب از راست به چپ چند وات است؟**




۱) ۲۲ / ۵ ، ۰ / ۵

۲) ۱۳ / ۵ ، ۰ / ۵

۳) ۲۲ / ۵ ، ۱

۴) ۱۳ / ۵ ، ۱

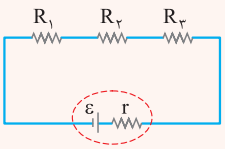
**پاسخ: گزینهٔ ۱**

### درس‌نامه

۱) **نام‌گذاری نقاط هم‌پتانسیل:** بعضی وقت‌ها تشخیص متوالی یا موازی بودن مقاومت‌ها مشکل است. در این صورت می‌توانیم شکل ساده‌تری از مدار را رسم کنیم تا متوالی یا موازی بودن مقاومت‌ها را تشخیص بدهیم. برای این‌کار، نقاطی از مدار را که با سیم به یکدیگر وصل شده‌اند، با یک نام مشترک در نظر می‌گیریم. بعد از نام‌گذاری چنین نقاطی از مدار، دو سر مولد یا دو سر مدار را مبنا قرار می‌دهیم و بقیهٔ اجزای مدار را بین نقطه‌های نام‌گذاری‌شده جای‌گذاری می‌کنیم تا شکل ساده‌تری از مدار به دست بیاید.

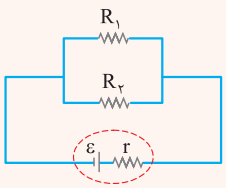
مثال:

۲) مقاومت معادل مقاومت‌هایی که به صورت متوالی به یکدیگر وصل شده‌اند، برابر با مجموع مقاومت‌هاست:




$$R_{eq} = R_۱ + R_۲ + R_۳$$

۳) اگر دو مقاومت به صورت موازی به یکدیگر وصل شده باشند، مقاومت معادل آن‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

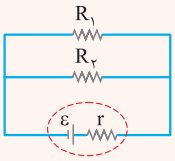



$$\frac{۱}{R_{eq}} = \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۲} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_۱ R_۲}{R_۱ + R_۲}$$

۴) **تعریف مقاومت الکتریکی:** به نسبت اختلاف پتانسیل دو سر یک رسانا به جریان الکتریکی عبوری از آن، مقاومت الکتریکی رسانا می‌گوییم.

$$R = \frac{V}{I} \begin{matrix} \rightarrow \text{اختلاف پتانسیل الکتریکی } (V) \\ \rightarrow \text{جریان الکتریکی } (A) \end{matrix} \leftarrow \text{مقاومت الکتریکی } (\Omega)$$

۵) اختلاف پتانسیل مقاومت‌ها در اتصال موازی، با یکدیگر برابر است؛ بنابراین جریان الکتریکی عبوری از مقاومت‌ها به نسبت عکس مقاومت‌ها تقسیم می‌شود.




$$V_۱ = V_۲ \xrightarrow{V=RI} R_۱ I_۱ = R_۲ I_۲ \Rightarrow \frac{R_۱}{R_۲} = \frac{I_۲}{I_۱}$$

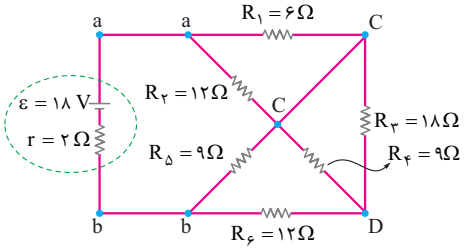
۶) توان مصرفی مقاومت الکتریکی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

جریان الکتریکی (A)
↑
توان مصرفی (W) ← $P = RI^2$
↓
مقاومت الکتریکی (Ω)

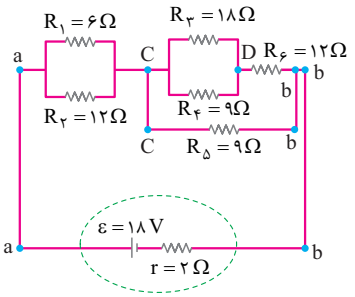
۷) توان خروجی باتری از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

جریان الکتریکی (A)
↑
توان خروجی باتری (W) ← $P = \varepsilon I - rI^2$ → مقاومت درونی باتری (Ω)
↓
نیروی محرکهٔ مولد (V)

**پاسخ تشریحی** شکل مدار کمی پیچیده است (شکل الف)؛ پس به کمک نام‌گذاری نقاط هم‌پتانسیل، شکل ساده‌تری از مدار را رسم می‌کنیم (شکل ب).




(الف)




(ب)

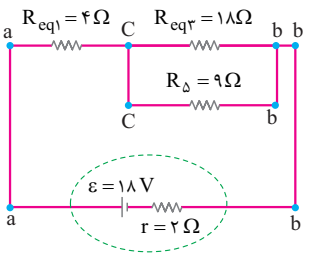
سؤال از ما توان مصرفی مقاومت $R_3$ و توان خروجی باتری را می‌خواهد؛ پس به جریان عبوری از مقاومت $R_3$ و جریان خروجی از باتری نیاز داریم. برای محاسبهٔ این جریان‌ها، ابتدا باید مقاومت معادل مدار را به دست بیاوریم. باتوجه به شکل (ب)، دو مقاومت $R_1$ و $R_2$ موازی هستند؛ بنابراین مقاومت معادل آن‌ها برابر است با:

$$R_{eq_1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \xrightarrow[R_2 = 12\Omega]{R_1 = 6\Omega} R_{eq_1} = \frac{6 \times 12}{6 + 12} = 4\Omega$$

دو مقاومت $R_3$ و $R_4$ هم موازی هستند و مقاومت معادل آن‌ها ($R_{eq_2}$) با مقاومت $R_6$ متوالی است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$R_{eq_2} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \xrightarrow[R_4 = 9\Omega]{R_3 = 18\Omega} R_{eq_2} = \frac{18 \times 9}{18 + 9} = 6\Omega \,,\; R_{eq_3} = R_{eq_2} + R_6 = 6 + 12 = 18\Omega$$

تا الان شکل مدار به صورت شکل (پ) است.




(پ)

با توجه به شکل (پ)، دو مقاومت $R_{eq_3}$ و $R_5$ موازی هستند و مقاومت معادل آن‌ها با مقاومت $R_{eq_1}$ متوالی است؛ بنابراین مقاومت معادل مدار را می‌توانیم به دست بیاوریم.

$$R_{eq_4} = \frac{R_{eq_3} R_5}{R_{eq_3} + R_5} \xrightarrow[R_5 = 9\Omega]{R_{eq_3} = 18\Omega} R_{eq_4} = \frac{18 \times 9}{18 + 9} = 6\Omega, R_{eq} = R_{eq_4} + R_{eq_1} = 6 + 4 = 10\Omega$$

حالا که مقاومت معادل مدار را به دست آوردیم، می‌توانیم جریان خروجی از باتری را محاسبه کنیم.

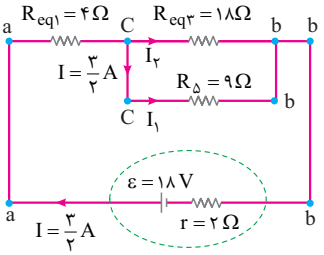
$$I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}\xrightarrow[R_{eq}=10\Omega,r=2\Omega]{\varepsilon=18V}I=\frac{18}{10+2}=\frac{3}{2}A$$

الان همهٔ اطلاعات لازم را برای محاسبهٔ توان خروجی باتری داریم؛ پس توان خروجی باتری را محاسبه می‌کنیم.

$$P=\varepsilon I-rI^2\xrightarrow[r=2\Omega]{\varepsilon=18V,I=\frac{3}{2}A}P=18\times\frac{3}{2}-2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=27-4/5=22/5W$$

۲ و ۴ پَر!

به سراغ توان مصرفی مقاومت $R_3$ می‌رویم. همان‌طور که گفتیم، برای محاسبهٔ توان مصرفی مقاومت $R_3$ به جریان عبوری از آن نیاز داریم. برای محاسبهٔ این جریان، ابتدا باید جریان عبوری از مقاومت $R_{eq_3}$ را به دست بیاوریم (شکل ت).



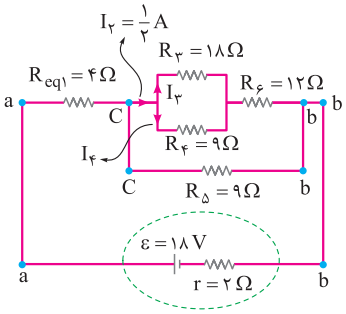

(ت)

$$I_1+I_2=\frac{3}{2}A\ (1)$$

$$R_5,R_{eq_3}\text{ دو مقاومت موازی‌اند}:V_{Req_3}=V_5\Rightarrow R_{eq_3}I_2=R_5I_1\xrightarrow[R_5=9\Omega]{R_{eq_3}=18\Omega}18I_2=9I_1\Rightarrow I_1=2I_2\ (2)$$

$$(2),(1):2I_2+I_2=\frac{3}{2}\to 3I_2=\frac{3}{2}\Rightarrow I_2=\frac{1}{2}A$$

شکل (ب) را ببینید! مقاومت $R_{eq_3}$ از مقاومت‌های $R_3$ و $R_4$ که مقاومت معادل آن‌ها ($R_{eq_2}$) با مقاومت $R_6$ متوالی است، تشکیل شده است. از طرفی جریان عبوری از دو مقاومت متوالی $R_{eq_2}$ و $R_6$ یکسان و برابر با $I_2=\frac{1}{2}A$ است؛ باتوجه به این توضیحات، جریان عبوری از مقاومت $R_3$ را به دست می‌آوریم (شکل ث).




(ث)

$$I_3+I_4=\frac{1}{2}A\ (1)$$

$$V_3=V_4\to R_3I_3=R_4I_4\xrightarrow{\frac{R_3=18\Omega}{R_4=9\Omega}}18I_3=9I_4\to I_4=2I_3\ (2)$$

$$(2),(1):I_3+2I_3=\frac{1}{2}\to 3I_3=\frac{1}{2}\to I_3=\frac{1}{6}A$$

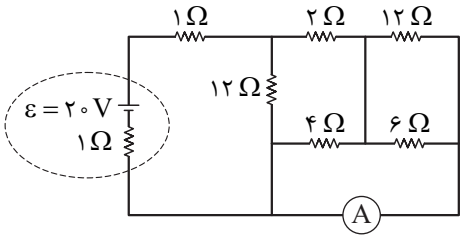
حالا می‌توانیم توان مصرفی مقاومت $R_3$ را محاسبه کنیم.

$$P_3=R_3I_3^2\xrightarrow[I_3=\frac{1}{6}A]{R_3=18\Omega}P_3=18\times\left(\frac{1}{6}\right)^2=18\times\frac{1}{36}=0/5W$$

## تست و پاسخ ۶۴

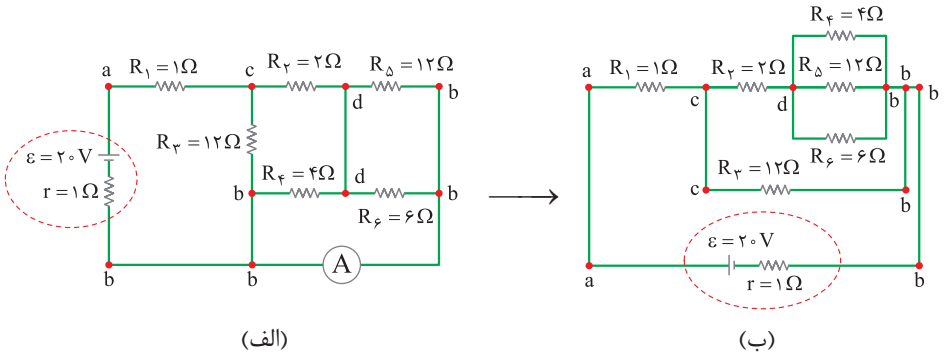
**در مدار شکل زیر، جریان عبوری از آمپرسنج آرمانی چند آمپر است؟**

۱) ۰/۵
۲) ۱
۳) ۱/۵
۴) ۲/۵




**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**پاسخ تشریحی** ابتدا نقاط هم‌پتانسیل را نام‌گذاری می‌کنیم (شکل الف). سپس شکل ساده‌تری از مدار را رسم می‌کنیم (شکل ب).



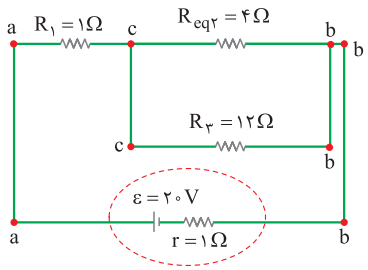

(الف) (ب)

برای این‌که جریان عبوری از آمپرسنج آرمانی را به دست بیاوریم، ابتدا باید جریان خروجی از باتری را پیدا کنیم؛ پس به سراغ مقاومت معادل مدار می‌رویم تا با استفاده از آن بتوانیم جریان خروجی از باتری را محاسبه کنیم. با توجه به شکل (ب)، سه مقاومت $R_۴$، $R_۵$ و $R_۶$ موازی هستند و مقاومت معادل آن‌ها ($R_{eq_۱}$) با مقاومت $R_۲$ متوالی است؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{۱}{R_{eq_۱}}=\frac{۱}{R_۴}+\frac{۱}{R_۵}+\frac{۱}{R_۶}\xrightarrow[R_۶=۶\Omega]{R_۴=۴\Omega,R_۵=۱۲\Omega}\frac{۱}{R_{eq}}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۶}=\frac{۳+۱+۲}{۱۲}=\frac{۶}{۱۲}$$

$$\rightarrow R_{eq_۱}=۲\Omega\ ,\ R_{eq_۲}=R_۲+R_{eq_۱}=۲+۲=۴\Omega$$

تا الان شکل مدار به صورت شکل (پ) شده است.




(پ)

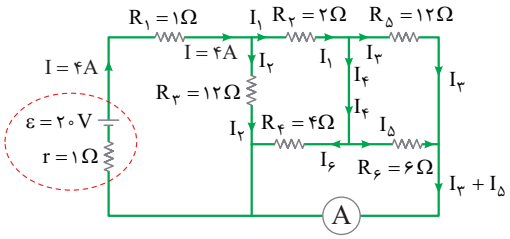
باتوجه به شکل (پ) دو مقاومت $R_{eq_۲}$ و $R_۳$ با هم موازی‌اند و مقاومت معادل آن ($R_{eq_۳}$) با مقاومت $R_۱$ متوالی است؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$R_{eq_۳}=\frac{R_{eq_۲}R_۳}{R_{eq_۲}+R_۳}\xrightarrow[R_۳=۱۲\Omega]{R_{eq_۲}=۴\Omega}R_{eq_۳}=\frac{۴\times۱۲}{۴+۱۲}=۳\Omega\ ,\ R_{eq}=R_{eq_۳}+R_۱=۳+۱=۴\Omega$$

حالا می‌توانیم جریان خروجی از باتری را به دست بیاوریم.

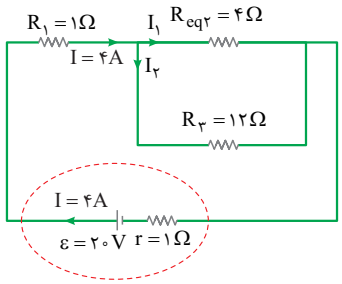
$$I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}\xrightarrow[R_{eq}=۴\Omega,r=۱\Omega]{\varepsilon=۲۰V}I=\frac{۲۰}{۴+۱}=۴A$$

با توجه به شکل (ت)، آمپرسنج آرمانی جریان عبوری از مقاومت‌های $R_۵$ و $R_۶$ را نشان می‌دهد؛ پس باید جریان عبوری از این دو مقاومت را به دست بیاوریم.




(ت)

شکل (ث) را ببینید! جریان خروجی از باتری بین دو مقاومت موازی $R_{eq_۲}$ و $R_۳$ تقسیم می‌شود؛ بنابراین می‌توانیم بنویسیم:



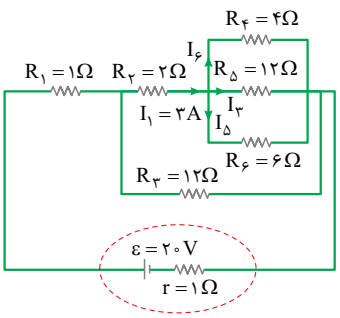

(ث)

$$I_۱+I_۲=۴A\ \ (۱)$$

$$V_{R_{eq_۲}}=V_۳\rightarrow R_{eq_۲}I_۱=R_۳I_۲\rightarrow ۴I_۱=۱۲I_۲\rightarrow I_۱=۳I_۲$$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)}۳I_۲+I_۲=۴\rightarrow I_۲=۱A\ ,\ I_۱=۳A$$

مقاومت $R_{eq_۲}$ از مقاومت‌های موازی $R_۴$، $R_۵$ و $R_۶$ که مقاومت معادل آن‌ها $(R_{eq_۱})$ با مقاومت $R_۲$ متوالی است، تشکیل شده است. از طرفی جریان عبوری از دو مقاومت متوالی $R_{eq_۱}$ و $R_۲$ یکسان و برابر با $I_۱=۳A$ است. باتوجه به این توضیحات، جریان عبوری از مقاومت‌های $R_۴$، $R_۵$ و $R_۶$ را به دست می‌آوریم (شکل ج).




(ج)

$$I_۶+I_۳+I_۵=۳A\ \ (۱)$$

$$V_۴=V_۵\rightarrow R_۴I_۶=R_۵I_۳\xrightarrow[R_۵=۱۲\Omega]{R_۴=۴\Omega}۴I_۶=۱۲I_۳\rightarrow I_۶=۳I_۳\ \ (۲)$$

$$V_۶=V_۵\rightarrow R_۶I_۵=R_۵I_۳\xrightarrow[R_۵=۱۲\Omega]{R_۶=۶\Omega}۶I_۵=۱۲I_۳\rightarrow I_۵=۲I_۳\ \ (۳)$$

$$\xrightarrow{(۳),(۲),(۱)}۳I_۳+I_۳+۲I_۳=۳\rightarrow I_۳=۰/۵A\ ,\ I_۵=۱A\ ,\ I_۶=۱/۵A$$

جریان عبوری از آمپرسنج آرمانی برابر با مجموع جریان‌های $I_۳$ و $I_۵$ است.

$$I_۳+I_۵=۰/۵+۱=۱/۵A$$

## تست و پاسخ ۶۵

**ذره‌ای به جرم $3g$ و بار الکتریکی $6\mu C$ در راستای افقی با تندی $500\ km/s$ به سمت شرق پرتاب می‌شود. در محل پرتاب این ذره، میدان مغناطیسی یکنواخت $B = 500G$ به سمت شمال، و میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ وجود دارد. $\vec{E}$ برابر چند ولت بر میلی‌متر و در چه جهتی باشد تا ذره روی خط راست و بدون انحراف به حرکت خود ادامه دهد؟ $(g = 10\ N/kg)$**

۱) ۲۰، عمود بر سطح زمین و به سمت بالا
۲) ۲۵، عمود بر سطح زمین و به سمت بالا
۳) ۲۰، عمود بر سطح زمین و به سمت پایین
۴) ۲۵، عمود بر سطح زمین و به سمت پایین

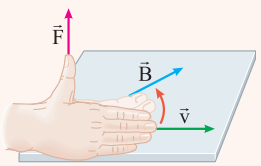
**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**درس‌نامه** ۱) اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار متحرک از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

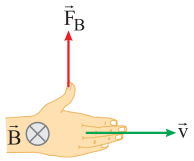
$F = |q| vB \sin\theta$

$|q|$: اندازهٔ بار الکتریکی $(C)$، $v$: تندی $(m/s)$، $\theta$: زاویهٔ بین $\vec{B}$ و $\vec{v}$، $B$: اندازهٔ میدان مغناطیسی $(T)$، $F$: اندازهٔ نیروی مغناطیسی $(N)$

۲) برای تشخیص جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار متحرک، از قاعدهٔ دست راست استفاده می‌کنیم. طبق این قاعده، اگر چهار انگشت دست راست را در جهت حرکت ذره با بار مثبت $(\vec{v})$ قرار دهیم، به طوری که وقتی آن‌ها را خم می‌کنیم، در جهت میدان مغناطیسی $(\vec{B})$ قرار بگیرد، آن‌گاه انگشت شستمان جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره $(\vec{F})$ را نشان می‌دهد.




**پاسخ تشریحی** ابتدا جهت و اندازهٔ نیروی مغناطیسی وارد بر ذرهٔ باردار را به دست می‌آوریم. طبق قاعدهٔ دست راست، چهار انگشت دست راستمان را در جهت حرکت ذره (شرق) قرار می‌دهیم به طوری که وقتی آن‌ها را خم کنیم به سمت میدان مغناطیسی (شمال) قرار بگیرد. در این صورت، انگشت شستمان جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره (بالا) را نشان می‌دهد. با استفاده از رابطهٔ زیر می‌توانیم اندازهٔ آن را نیز به دست آوریم (شکل الف).




(الف)

$$F_B = |q| vB \sin\theta \xrightarrow[B=500\times10^{-4}T,\ \theta=90^\circ]{|q|=6\times10^{-6}C,\ v=5\times10^{5}m/s}$$

$$F_B = 6\times10^{-6}\times5\times10^{5}\times500\times10^{-4}\times1 = 0/15\,N$$

از طرفی، اندازهٔ وزن ذره برابر با $(W = mg = 3\times10^{-3}\times10) 0/03\,N$ و جهت آن رو به پایین است؛ پس اگر ذره بخواهد روی خط راست و بدون انحراف به حرکت خود ادامه دهد، جهت نیروی الکتریکی وارد بر ذرهٔ باردار باید رو به پایین باشد: بنابراین باتوجه به شکل (ب) می‌توانیم بنویسیم:

(ب)

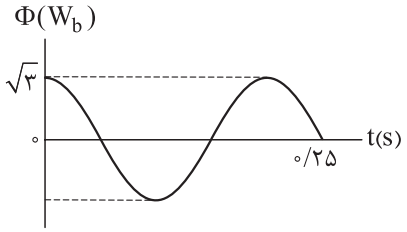
$$F_E + W = F_B \xrightarrow[F_B=0/15\,N,\ q=6\times10^{-6}C]{F_E=qE,\ W=0/03\,N} 6\times10^{-6}E + 0/03 = 0/15$$

$$\rightarrow 6\times10^{-6}E = 12\times10^{-2} \rightarrow E = 20\times10^{3}\frac{V}{m} = 20\frac{V}{mm}$$

با توجه به این‌که بار ذره مثبت است، پس نیروی الکتریکی وارد بر آن هم‌جهت با میدان الکتریکی است؛ بنابراین جهت میدان الکتریکی هم رو به پایین است.

## تست و پاسخ ۶۶

**نمودار شار مغناطیسی عبوری از یک پیچهٔ مولد جریان متناوب به مقاومت الکتریکی $۳\Omega$ به شکل زیر است. اگر بیشینهٔ جریان القاشده در این پیچه $۲A$ باشد، در لحظهٔ $t=\frac{۱}{۱۲}s$ به‌ترتیب از راست به چپ، نیروی محرکهٔ القایی در پیچه چند ولت و شار مغناطیسی گذرنده از آن چند وبر است؟**




۱) $۳$ و $\frac{۳}{۲}$

۲) $۳$ و $-\frac{۳}{۲}$

۳) $۶$ و $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

۴) $۶$ و $-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**درس‌نامه** ۱) شار مغناطیسی که در لحظهٔ $t$ از پیچه می‌گذرد، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

بیشینهٔ شار مغناطیسی (Wb)

$$\phi=\phi_m\cos\frac{۲\pi}{T}t$$

دوره (s)

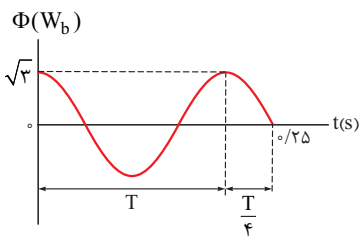
۲) نیروی محرکهٔ القایی در پیچه و در لحظهٔ $t$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

بیشینهٔ مقدار نیروی محرکهٔ القایی (V)

$$\varepsilon=\varepsilon_m\,Sin\frac{۲\pi}{T}t$$

دوره (s)

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا با توجه به نمودار $\phi-t$، دورهٔ تناوب را به دست می‌آوریم تا بتوانیم معادلهٔ شار مغناطیسی عبوری از پیچه برحسب زمان را بنویسیم.




$$T+\frac{T}{۴}=۰/۲۵\rightarrow\frac{۵T}{۴}=۰/۲۵\rightarrow T=\frac{۱}{۵}s$$

**گام دوم:** حالا می‌توانیم معادلهٔ شار مغناطیسی عبوری از پیچه برحسب زمان را بنویسیم و شار مغناطیسی عبوری از پیچه در لحظهٔ $t=\frac{۱}{۱۲}s$ را پیدا کنیم.

$$\phi=\phi_m\cos\frac{۲\pi}{T}t\xrightarrow[T=\frac{۱}{۵}s]{\phi_m=\sqrt{۳}\,Wb}\phi=\sqrt{۳}\cos\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۵}}t=\sqrt{۳}\cos۱۰\pi t$$

$$\phi=\sqrt{۳}\cos۱۰\pi t\xrightarrow{t=\frac{۱}{۱۲}s}\phi=\sqrt{۳}\cos\cancel{۱۰}^{۵}\pi\times\frac{۱}{\cancel{۱۲}_{۶}}=\sqrt{۳}\times(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})=-\frac{۳}{۲}Wb$$

همین جا گزینهٔ درست معلوم شده است.

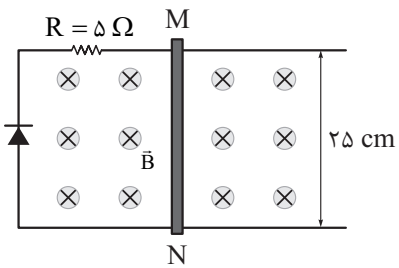
**گام سوم:** سؤال از ما نیروی محرکهٔ القایی در پیچه در لحظهٔ $t=\frac{۱}{۱۲}s$ را هم می‌خواهد؛ پس معادلهٔ نیروی محرکهٔ القایی در پیچه در لحظهٔ $t$ را می‌نویسیم.

$$\varepsilon=\varepsilon_m\sin\frac{۲\pi}{T}t\xrightarrow[R=۳\Omega,I_m=۲A]{\varepsilon_m=RI_m,T=\frac{۱}{۵}s}\varepsilon=۳\times۲\sin\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۵}}t=۶\sin۱۰\pi t$$

$$\xrightarrow{t=\frac{۱}{۱۲}s}\varepsilon=۶\sin\frac{۱۰\pi}{۵}\times\frac{۱}{۱۲}=۶\times\frac{۱}{۲}=۳V$$

## تست و پاسخ ۶۷

**مدار شکل زیر، عمود بر میدان مغناطیسی یکنواختی به بزرگی $B=۲۰۰G$ قرار دارد. بردار سرعت حرکت میلهٔ رسانای MN برحسب متر بر ثانیه، کدام باشد تا در مقاومت R، جریان الکتریکی متوسط ۴mA القا شود؟ (مقاومت الکتریکی دیود ناچیز است.)**




۱) $۴\vec{i}$

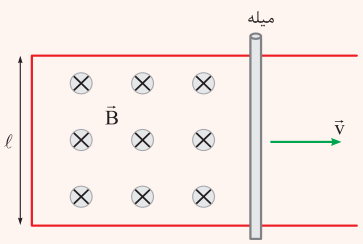
۲) $۰/۴\vec{i}$

۳) $-۴\vec{i}$

۴) $-۰/۴\vec{i}$

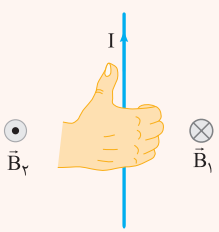
**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**درس‌نامه** ۱) اگر میلهٔ رسانایی با سرعت ثابت $\vec{v}$ بر روی رسانای U شکلی که درون میدان مغناطیسی $\vec{B}$ و عمود بر آن قرار دارد حرکت کند، بزرگی نیروی محرکهٔ القایی ایجاد شده، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:




$$|\varepsilon_{av}|=B\ell v$$

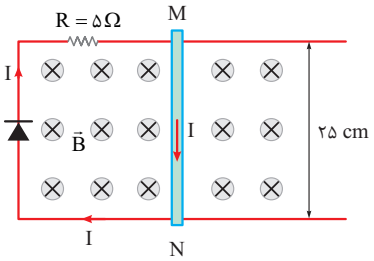
۲) برای تشخیص جهت میدان مغناطیسی در اطراف سیم راست، انگشت شست دست راست را در جهت جریان قرار می‌دهیم، جهت خم‌شدن چهار انگشت دیگر، جهت میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد.




۳) با تغییر میدان مغناطیسی در محل یک پیچه یا تغییر مساحت پیچه در حضور میدان مغناطیسی یا چرخش پیچه درون میدان مغناطیسی، جریان الکتریکی در آن القا می‌شود. عامل اساسی در ایجاد جریان القایی، تغییر شار مغناطیسی عبوری از پیچه است.

۴) **قانون لنز:** جریان القایی در جهتی است که با تغییر شار مغناطیسی مخالفت کند؛ یعنی اگر شار در حال افزایش باشد، جریان در جهتی القا می‌شود که از افزایش شار جلوگیری کند و اگر شار در حال کاهش باشد، جریان در جهتی القا می‌شود که از کاهش شار جلوگیری کند.

**پاسخ تشریحی** دیود جریان را در یک جهت عبور می‌دهد؛ بنابراین وجود دیود در این‌جا باعث می‌شود که جریان در مدار به صورت ساعتگرد باشد.




طبق قاعدهٔ دست راست، اگر انگشت شست دست راستمان را در جهت جریان الکتریکی القایی (I) قرار بدهیم، جهت خم‌شدن چهار انگشت دیگر، جهت میدان مغناطیسی القایی را نشان می‌دهد؛ بنابراین میدان مغناطیسی القایی درون حلقه، درون‌سو است. با توجه به این‌که میدان مغناطیسی القایی، هم‌جهت با میدان مغناطیسی اصلی است، پس طبق قانون لنز، شار مغناطیسی عبوری از حلقه در حال کاهش است؛ بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که مساحت حلقه در حال کاهش است و میلهٔ رسانای MN به سمت چپ حرکت می‌کند. حالا سرعت حرکت میلهٔ رسانای MN را با استفاده از رابطهٔ زیر به دست می‌آوریم:

$$|\varepsilon_{av}| = B\ell v \xrightarrow{\varepsilon_{av} = RI_{av}} RI = B\ell v \xrightarrow[B=۲۰۰\times۱۰^{-۴}\,T,\ \ell=۰/۲۵\,m]{R=۵\Omega,\ I_{av}=۴\times۱۰^{-۳}\,A}$$

$$۵\times۴\times۱۰^{-۳} = ۲۰۰\times۱۰^{-۴}\times۰/۲۵\,v \rightarrow v = ۴\,m/s \xrightarrow{\text{میلهٔ رسانای MN به سمت چپ حرکت می‌کند.}} \vec{v} = -۴\,\vec{i}$$

## تست و پاسخ ۶۸

**در مدتی که تندی خودرویی به جرم ۱۰۸۰ kg از ۳۰ km / h به ۶۰ km / h می‌رسد، کار کل انجام‌شده روی آن چند کیلوژول است؟**

۱) ۱۱۲/۵ ۲) ۱۱۲۵ ۳) ۱۴۵/۸ ۴) ۱۴۵۸

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**مشاوره** **قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی، از مطالب بسیار مهم در فصل ۳ فیزیک دهم است و تاکنون تست‌های زیادی از آن در کنکورهای اخیر مطرح شده است.**

**خودت حل کنی بهتره** تندی‌های داده‌شده را برحسب m / s بنویسید. سپس با استفاده از قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی، کار کل انجام‌شده را به دست آورید.

**درس نامه** **قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی**

کار کل انجام‌شده روی یک جسم در یک جابه‌جایی معین، با تغییر انرژی جنبشی آن برابر است.

$$W_t = K_۲ - K_۱$$

$W_t$ = کار کل (کار برایند نیروها) (J)

$K_۱$ = انرژی جنبشی در حالت ۱ (J)

$K_۲$ = انرژی جنبشی در حالت ۲ (J)

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲$$

انرژی جنبشی (J) ← K

جرم (kg) ↑ m

تندی (m / s) ↓ v

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** تندی متحرک در حالت اول و در حالت دوم را برحسب $m/s$ به دست می‌آوریم:

$$v_1 = \frac{30}{3/6} = \frac{25}{3}\ m/s$$

$$v_2 = \frac{60}{3/6} = \frac{50}{3}\ m/s$$

**گام دوم:** با استفاده از قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی، کار کل انجام‌شده روی خودرو را به دست می‌آوریم:

$$W_t = K_2 - K_1 \Rightarrow W_t = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

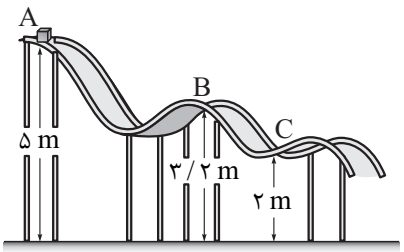
$$\xrightarrow[v_1=\frac{25}{3}\,m/s,\ v_2=\frac{50}{3}\,m/s]{m=1080\,kg} W_t = \frac{1}{2}\times 1080\left(\left(\frac{50}{3}\right)^2 - \left(\frac{25}{3}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow W_t = 540\left(\frac{2500}{9} - \frac{625}{9}\right) = 540\left(\frac{1875}{9}\right) = 112500\,J$$

$$\Rightarrow W_t = 112/5\,kJ$$

## تست و پاسخ ۶۹

**در شکل زیر، جسمی به جرم ۱۲kg در نقطهٔ A از حال سکون رها می‌شود و در مسیری بدون اصطکاک سُر می‌خورد. کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ این جسم درست است؟ $(g = 10\ N/kg)$**




**الف) تندی جسم در نقطهٔ B به $6\ m/s$ می‌رسد.**

**ب) انرژی جنبشی جسم در نقطهٔ C برابر ۲۴۰J است.**

**پ) کار نیروی گرانش در حرکت جسم از نقطهٔ A تا نقطهٔ B برابر ۲۱۶− J است.**

۱) الف
۲) الف و ب
۳) الف و پ
۴) ب و پ

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**مشاوره** این تست بر اساس یکی از مسئله‌های دوره‌ای فصل ۳ کتاب فیزیک ۱ طرح شده است. مسئله‌ها و تمرین‌های کتاب درسی را جدی بگیرید.

**درس‌نامه** ۱) **انرژی مکانیکی:** مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل هر جسم را انرژی مکانیکی آن می‌نامیم و با E نشان می‌دهیم.

$$E = K + U$$

$K$: انرژی جنبشی (J) — $U$: انرژی پتانسیل (J) — $E$: انرژی مکانیکی (J)

۲) **اصل پایستگی انرژی مکانیکی:** در شرایطی که بتوان اثر ناشی از نیروهایی مانند اصطکاک و مقاومت هوا را نادیده گرفت، مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل جسم در نقطه‌های مختلف مسیر حرکت، با هم برابر و پایسته می‌ماند.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$E_1$ = انرژی مکانیکی در حالت اول (J)

$E_2$ = انرژی مکانیکی در حالت دوم (J)

۳) **کار نیروی گرانش یا کار نیروی وزن ($W_{mg}$):**

اگر جسم به گونه‌ای حرکت کند که جابه‌جایی قائم آن، رو به پایین باشد، کار نیروی گرانش بر روی آن مثبت بوده و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$W_{mg} = mgh$$

$m$: جرم (kg) — $h$: جابه‌جایی قائم (m) — $g$: شتاب گرانش (N/kg)

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** رابطهٔ پایستگی انرژی را بین دو نقطهٔ A و B می‌نویسیم. توجه کنید که تندی جسم در نقطهٔ A، صفر است؛ بنابراین انرژی جنبشی آن نیز صفر است.

$$E_A = E_B \Rightarrow \cancel{K_A}^{0} + U_A = K_B + U_B \Rightarrow mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

$$\Rightarrow gh_A = \frac{1}{2}v_B^2 + gh_B \xrightarrow[h_A=5m\ ,\ h_B=3/2m]{g=10\,N/kg} 10\times 5 = \frac{1}{2}v_B^2 + 10\times 3/2$$

پس مورد «الف» درست است.

$$\Rightarrow v_B^2 = 36 \Rightarrow v_B = 6\ m/s$$

**گام دوم:** پایستگی انرژی مکانیکی را بین دو نقطهٔ A و C می‌نویسیم:

$$E_A = E_C \Rightarrow \cancel{K_A}^{0} + U_A = K_C + U_C \Rightarrow K_C = U_A - U_C$$

$$\Rightarrow K_C = mgh_A - mgh_C = mg(h_A - h_C) \xrightarrow[h_A=5m,h_C=2m]{m=12kg,g=10\,N/kg} K_C = 12\times 10(5-2) = 360\,J$$

پس مورد «ب» نادرست است.

**گام سوم:** کار نیروی گرانش در جابه‌جایی جسم از نقطهٔ A تا B را به دست می‌آوریم. چون جابه‌جایی قائم جسم رو به پائین است، کار نیروی گرانش مثبت بوده و مورد «پ» نادرست است.

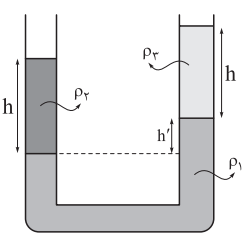
$$(W_{mg})_{AB} = mg(h_A - h_B) \xrightarrow[h_A=5m,h_B=3/2m]{m=12kg,g=10\,N/kg} (W_{mg})_{AB} = 12\times 10(5-3/2)$$

$$\Rightarrow (W_{mg})_{AB} = 120\times 1/8 = 216\,J$$

**تکنیک** جابه‌جایی قائم جسم از A تا B به سمت پایین است. بنابراین کار نیروی گرانش مثبت است و ۳ و ۴ رد می‌شوند. مورد الف هم در هر دو ۱ و ۲ وجود دارد، پس درست است. بنابراین می‌توانیم فقط با محاسبات گام دوم، انرژی جنبشی جسم در نقطهٔ C را به دست آوریم و گزینهٔ صحیح را انتخاب کنیم.

## تست و پاسخ ۷۰

**در شکل زیر، سه مایع مخلوط‌نشدنی به چگالی‌های $\rho_1$، $\rho_2$ و $\rho_3$ در تعادل هستند. اگر $\rho_1 = 2\rho_3 = 10\rho_2$ باشد، نسبت $\frac{h'}{h}$ کدام است؟**




۱) ۰/۲
۲) ۰/۴
۳) ۰/۶
۴) ۰/۸

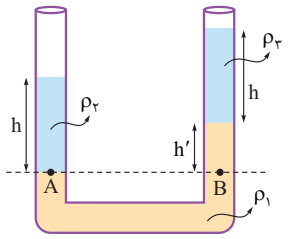
**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**مشاوره** مشابه این سؤال چندین بار در کنکورهای سال‌های اخیر تکرار شده است. روی این نوع سؤال‌ها کاملاً مسلط شوید.

**درس‌نامه** در لوله‌های U شکل اگر یک سطح افقی فرضی از طرفین لوله بگذرانیم، طوری که زیر آن سطح فقط یک نوع مایع قرار گیرد، فشار در طرفین لوله روی این سطح برابر است.

**نکته** در نوشتن معادلهٔ فوق، وقتی هر دو انتهای لولهٔ U شکل باز بوده و با هوای آزاد در تماس است، نیازی به نوشتن فشار هوای محیط ($P_0$) نیست، زیرا $P_0$ از طرفین معادله حذف می‌شود.

**پاسخ تشریحی** یک سطح افقی فرضی را از طرفین لوله می‌گذرانیم تا لوله را در نقاط A و B قطع کند. سپس فشار در نقاط A و B را مساوی با هم قرار می‌دهیم.




$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_2 g h_2 = \rho_3 g h_3 + \rho_1 g h_1$$

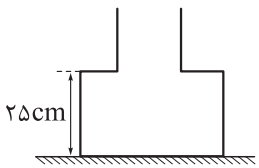
$$\Rightarrow \rho_2 h_2 = \rho_3 h_3 + \rho_1 h_1 \xrightarrow[\rho_2 = 5\rho_3]{\rho_1 = 10\rho_3}$$

$$\Rightarrow 5\rho_3 h = \rho_3 h + 10\rho_3 h' \Rightarrow 4h = 10h'$$

$$\Rightarrow \frac{h'}{h} = 0/4$$

## تست و پاسخ ۷۱

**در شکل زیر، ظرفی که از دو قسمت استوانه‌ای به مساحت‌های مقطع $50cm^2$ و $20cm^2$ تشکیل شده است، روی سطح افقی قرار دارد. در این ظرف چند کیلوگرم از مایعی به چگالی $0/8\ g/cm^3$ بریزیم تا نیرویی که از ظرف مایع به کف ظرف وارد می‌شود، برابر ۱۲N باشد؟ $(g = 10\ N/kg)$**




۱) ۱/۳۵
۲) ۱/۲
۳) ۱/۰۸
۴) ۹/۶

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**درس‌نامه** نیروی وارد بر کف یک ظرف محتوی مایع از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

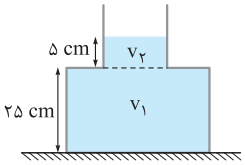
چگالی $(kg/m^3)$ — عمق مایع
نیرو $(N) \leftarrow F = \rho g h A \rightarrow$ مساحت کف ظرف $(m^2)$
شتاب گرانش $(N/kg)$

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** با معلوم‌بودن نیروی وارد بر کف ظرف، ارتفاع مایع را به دست می‌آوریم:

$$F = \rho g h A \xrightarrow[g=10\ N/kg\ ,\ A=50cm^2=50\times10^{-4}m^2]{F=12N,\ \rho=0/8\ g/cm^3=800\ kg/m^3}$$

$$12 = 800\times10\times h\times50\times10^{-4} \Rightarrow 12 = 8\times5h \Rightarrow h = 0/3\,m$$

$$\Rightarrow h = 30\,cm$$




**گام دوم:** حجم کل مایع را به دست آورده و با استفاده از رابطهٔ چگالی، جرم مایع را محاسبه می‌کنیم:

$$V = V_1 + V_2 = 50\times25 + 20\times5 = 1250 + 100 = 1350\,cm^3$$

$$m = \rho V \xrightarrow[V=1350\,cm^3]{\rho=0/8\ g/cm^3} m = 0/8\times1350 = 8\times135 = 1080\,g$$

$$\Rightarrow m = 1/08\,kg$$

## تست و پاسخ ۷۲

یک قرص دایره‌ای به شعاع ۱۰cm و ضخامت ۲mm، از فلزی به چگالی $8\ g/cm^3$ و گرمای ویژهٔ $400\ \frac{J}{kg.K}$ ساخته شده است. اگر این قرص $3/6\ kJ$ گرما دریافت کند، حجم آن $6/75\ mm^3$ افزایش می‌یابد. ضریب انبساط طولی فلز سازندهٔ قرص در SI کدام است؟ $(\pi = 3)$

۱) $2\times10^{-5}$ ۲) $2\times10^{-6}$ ۳) $6\times10^{-5}$ ۴) $6\times10^{-6}$

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**مشاوره** این تست به صورت کاملاً ترکیبی بین چگالی، گرما و انبساط گرمایی مطرح شده است. دقت داشته باشید که اگرچه ممکن است در کنکور، یک تست مجزا از چگالی نداشته باشیم، اما این مبحث به راحتی با بسیاری از مطالب دیگر فیزیک ترکیب می‌شود.

**خودت حل کنی بهتره** ابتدا حجم و جرم جسم را به دست آورید. سپس با استفاده از رابطهٔ $Q = mc\Delta T$ تغییر دمای جسم را محاسبه کنید و با قراردادن این تغییر دما در رابطهٔ انبساط حجمی، ضریب انبساط طولی فلز را به دست آورید.

**درس نامه** ۱) اگر دمای جسم جامدی از $T_1$ به $T_2$ برسد، حجم آن از $V_1$ به $V_2$ می‌رسد، به طوری که می‌توان نوشت:

$\Delta T = T_2 - T_1$ تغییر دما $(^\circ C)$ یا $(K)$ $\quad \Delta V = V_2 - V_1$ تغییر حجم $(m^3)$

$3\alpha$ = ضریب انبساط حجمی $(\frac{1}{K})$

$\alpha$ = ضریب انبساط طولی $(\frac{1}{K})$

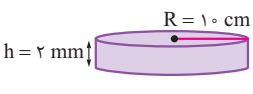
$$\Delta V = V_1(3\alpha)\Delta T$$

۲) برای جسمی که بدون تغییر حالت، در اثر تبادل گرمایی فقط دمای آن تغییر می‌کند، می‌توان نوشت:

$$Q = mc\Delta T$$

$Q$: گرما $(J)$، $m$: جرم $(kg)$، $c$: گرمای ویژه $(\frac{J}{kg.K})$، $\Delta T$: تغییر دما $(K)$

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** حجم و جرم جسم را به دست می‌آوریم:




$$V = \pi R^2 h \xrightarrow[h=2mm=0/2cm]{\pi=3,\ R=10cm} V = 3\times10^2\times0/2$$

$$\Rightarrow V = 60\,cm^3$$

$$m = \rho V \xrightarrow[V=60cm^3]{\rho=8\ g/cm^3} m = 8\times60 = 480\,g = 0/48\,kg$$

**گام دوم:** با استفاده از گرمای داده‌شده، تغییر دمای جسم را محاسبه می‌کنیم:

$$Q = mc\Delta T \xrightarrow[m=0/48kg,\ C=400\frac{J}{kg.K}]{Q=3/6\,kJ=3/6\times10^3\,J} 3/6\times10^3 = 0/48\times400\Delta T$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{3600}{0/48\times400} = \frac{9}{0/48} = \frac{3}{0/16}\,K$$

**گام سوم:** تغییر دمای به‌دست‌آمده را در رابطهٔ انبساط حجمی جسم جامد قرار می‌دهیم و از آن‌جا ضریب انبساط طولی را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta V = V_1(3\alpha)\Delta T \xrightarrow[V_1=60cm^3,\ \Delta T=\frac{3}{0/16}K]{\Delta V=6/75\,mm^3=6/75\times10^{-3}cm^3}$$

$$6/75\times10^{-3} = 60(3\alpha)\times\frac{3}{0/16} \Rightarrow \alpha = \frac{6/75\times0/16\times10^{-3}}{540} = \frac{1/08\times10^{-3}}{540} = 2\times10^{-6}\,K^{-1}$$

## تست و پاسخ ۷۳

**یک قطعه فلز به جرم ۵۰۰g را که دمای آن برحسب درجهٔ سلسیوس برابر $\theta$ است درون مقداری آب $0^\circ C$ می‌اندازیم. اگر دمای تعادل برحسب درجهٔ سلسیوس برابر $\frac{\theta}{4}$ باشد، جرم آب چند گرم است؟ ($c_{آب}=4/2\frac{J}{g.K}$، $c_{فلز}=350\frac{J}{kg.K}$ و $\theta<100^\circ C$ و اتلاف گرما ناچیز است.)**

۱) ۶۲/۵ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۸۷/۵ ۴) ۲۵۰

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**درس‌نامه** اگر دو یا چند جسم با دماهای مختلف، در تماس با یکدیگر قرار گیرند پس از مدتی هم‌دما می‌شوند؛ یعنی دمای آن‌ها به مقدار یکسانی می‌رسد که دمای تعادل نام دارد. براساس قانون پایستگی انرژی، جمع جبری گرماهای مبادله‌شده بین این اجسام، برابر با صفر است.

$$Q_1+Q_2+\ldots=0$$

**پاسخ تشریحی** فلز را به عنوان جسم ۱ و آب را به عنوان جسم ۲ در نظر می‌گیریم. جمع جبری گرماهای مبادله‌شده بین آن‌ها، برابر با صفر است.

$$\overset{فلز}{Q_1}+\overset{آب}{Q_2}=0\Rightarrow m_1C_1\Delta\theta_1+m_2C_2\Delta\theta_2=0$$

$$\xrightarrow[C_2=4/2\frac{J}{g.K},\Delta\theta_2=\frac{\theta}{4}-0=\frac{\theta}{4}]{m_1=500g,C_1=350\frac{J}{kg.K}=0/35\frac{J}{g.K},\Delta\theta_1=\frac{\theta}{4}-\theta=-\frac{3}{4}\theta}$$

$$500\times0/35\times(-\frac{3}{4}\theta)+m_2\times4/2\times(\frac{\theta}{4})=0\Rightarrow$$

$$m_2\times4/2\times\frac{\theta}{4}=5\times35\times\frac{3\theta}{4}\Rightarrow m_2=\frac{5\times35\times3}{4/2}=125g$$

## تست و پاسخ ۷۴

**درون استوانه‌ای 12L گاز اکسیژن با دمای $7^\circ C$ وجود دارد. فشار گاز درون استوانه را با فشارسنجی اندازه می‌گیریم. فشارسنج 14atm را نشان می‌دهد. دمای گاز را به $77^\circ C$ و حجم آن را به 25L می‌رسانیم. فشاری که فشارسنج در پایان نشان می‌دهد. چند اتمسفر است؟ (فشار هوای بیرون استوانه 1atm و گاز درون استوانه، گاز آرمانی است.)**

۱) ۷/۴ ۲) ۸ ۳) ۸/۴ ۴) ۹

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**مشاوره** این تست، یکی از مثال‌های کتاب درسی فیزیک پایهٔ دهم رشتهٔ ریاضی در فصل ۴ است.

**درس‌نامه** باتوجه به قانون گازهای آرمانی، برای مقداری معینی از یک گاز آرمانی در دو حالت مختلف می‌توان نوشت:

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}$$

$P_1$ = فشار گاز در حالت اول (atm)
$P_2$ = فشار گاز در حالت دوم (atm)
$V_1$ = حجم گاز در حالت اول (L)
$V_2$ = حجم گاز در حالت دوم (L)
$T_1$ = دمای گاز در حالت اول (K)
$T_2$ = دمای گاز در حالت دوم (K)

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** می‌دانیم فشارسنج، فشار پیمانه‌ای را نشان می‌دهد و در قانون گازهای کامل باید از فشار مطلق استفاده کنیم. هم‌چنین دمای به‌کاررفته در مورد گازها، حتماً باید برحسب کلوین باشد.

$$\begin{cases}P_1=P_{g_1}+P_0=14+1=15atm\\V_1=12L\\T_1=\theta_1+273=7+273=280K\end{cases}\quad\begin{cases}P_2=?\\V_2=25L\\T_2=\theta_2+273=77+273=350K\end{cases}$$

**گام دوم:** باتوجه به قانون گازهای کامل داریم:

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}\Rightarrow\frac{۱۵\times۱۲}{۲۸۰}=\frac{P_2\times۲۵}{۳۵۰}\Rightarrow\frac{۳\times۱۲}{۴}=\frac{P_2\times۵}{۵}$$

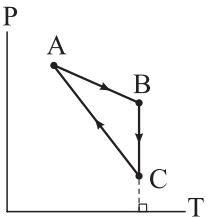
$$\Rightarrow P_2=\frac{۳\times۱۲\times۵}{۴\times۵}\Rightarrow P_2=۹\,atm$$

بنابراین، فشاری که اکنون فشارسنج نشان می‌دهد برابر است با:

$$P_{g_2}=P_2-P_0=۹-۱=۸\,atm$$

## تست و پاسخ ۷۵

**نمودار فشار برحسب دمای مقدار معینی گاز کامل، در طی یک چرخهٔ ترمودینامیکی به شکل زیر است. کدام‌یک از موارد زیر دربارهٔ این چرخه درست است؟**




**الف) در فرآیند AB، کار انجام‌شده روی گاز مثبت است.**

**ب) در فرآیند BC، گاز از محیط گرما دریافت می‌کند.**

**پ) در فرآیند CA، گاز از محیط گرما دریافت می‌کند.**

**ت) در طی چرخه، کار انجام‌شده توسط گاز مثبت است.**

۱) ب، الف ۲) ب، ت ۳) پ، الف ۴) پ، ت

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**مشاوره** فکر نکنید که تمام چرخه‌های ترمودینامیکی باید در دستگاه مختصات $P-V$ یعنی فشار برحسب حجم باشند. لازم است مانند این تست، نمونه سؤال‌هایی از دستگاه‌های مختصات $P-T$ یعنی فشار برحسب دمای مطلق یا $V-T$ یعنی حجم برحسب دمای مطلق نیز حل کنید.

**درس‌نامه** ۱) **معادلهٔ حالت گاز کامل:** $PV=nRT$

$P=$ فشار $(P_a)$

$V=$ حجم $(m^3)$

$n=$ تعداد مول $(mol)$

$R=$ ثابت جهانی گازها $=۸/۳۱۴\frac{J}{mol.K}$

$T=$ دما $(K)$

۲) **کار:** هنگامی که حجم گاز (دستگاه) تغییر کند یعنی متراکم یا منبسط شود. کار صورت گرفته است. کار انجام‌شده روی گاز را با $W$ نشان می‌دهیم.

$W>۰$: تراکم
$W<۰$: انبساط

۳) **قانون اول ترمودینامیک:** در یک فرایند ایستاوار، تغییر انرژی درونی دستگاه (گاز) برابر است با مجموع کار انجام‌شده توسط محیط روی دستگاه $(W)$ و گرمای مبادله‌شده بین دستگاه و محیط $(Q)$.

$\Delta U=$ تغییر انرژی درونی دستگاه (گاز) $(J)$ $\qquad \Delta U=Q+W$

۴) در یک فرایند هم‌دما، $\Delta U=۰$ است.

۵) اگر در دستگاه مختصات $P-T$، یک چرخهٔ ترمودینامیکی به صورت ساعتگرد باشد، کار انجام‌شده توسط گاز، مثبت است.

**پاسخ تشریحی** موارد «الف» تا «ت» را به ترتیب بررسی می‌کنیم.

الف) نادرست است؛ باتوجه به معادلهٔ حالت گاز کامل از $A$ تا $B$، حجم گاز افزایش یافته و $W_{AB}<۰$ است.

$$PV=nRT\Rightarrow\uparrow V=\frac{nRT\uparrow}{P\downarrow}\Rightarrow W_{AB}<۰$$

ب) درست؛ در فرایند هم‌دمای BC، حجم گاز افزایش یافته و $W_{BC} < 0$ است.

$$\uparrow V = \frac{nRT}{\downarrow P} \Rightarrow W_{BC} < 0$$

از طرفی چون در فرایند هم‌دما $\Delta U = 0$ است، داریم:

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow[W_{BC} < 0]{\Delta U_{BC} = 0} Q_{BC} > 0$$

یعنی گاز، از محیط گرما دریافت کرده است.

پ) نادرست؛ در فرایند CA حجم گاز کاهش یافته و $W_{CA} > 0$ است. همچنین به علت کاهش دما، انرژی درونی نیز کاهش می‌یابد.

$$\downarrow V = \frac{nRT\downarrow}{P\uparrow} \Rightarrow W_{CA} > 0$$

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow[W_{CA} > 0]{\Delta U_{CA} < 0} Q_{CA} < 0$$

یعنی گاز به محیط گرما می‌دهد.

ت) درست؛ با توجه به نکتهٔ ۵ درس‌نامه، در طی این چرخه، کار انجام شده توسط گاز مثبت است.

## تست و پاسخ ۷۶

**عنصر گالیم دارای دو ایزوتوپ طبیعی $^{69}Ga$ و $^{71}Ga$ است که فراوانی ایزوتوپ سبک‌تر آن، ۱/۵ برابر ایزوتوپ دیگر است. اگر عنصر فلوئور تنها دارای یک ایزوتوپ پایدار $^{19}F$ باشد، مجموع شمار یون‌ها در یک نمونهٔ ۹۵/۱ گرمی $GaF_3$ چه مضربی از $10^{23}$ است؟ (عدد جرمی را به تقریب معادل جرم اتمی هر ایزوتوپ در نظر بگیرید.)**

۱) ۱۸/۰۶ ۲) ۱۴/۵۱۵ ۳) ۱۲/۰۴ ۴) ۲۴/۰۸

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**پاسخ تشریحی**

**گام اول:** جرم اتمی میانگین گالیم را حساب می‌کنیم:

$$F_1 + F_2 = 100 \xrightarrow{F_1 = 1/5 F_2} 2/5 F_2 = 100 \Rightarrow F_2 = \%40$$

$$M = M_1 + \frac{F_2}{100}(M_2 - M_1) = 69 + \frac{40}{100}(71-69) = 69/8$$

**گام دوم:** جرم مولی $GaF_3$ را به دست می‌آوریم:

$$\text{جرم مولی } GaF_3 = \text{جرم مولی } Ga + 3(\text{جرم مولی } F) = 69/8 + 3(19) = 126/8\ g.mol^{-1}$$

**گام سوم:** شمار یون‌ها در ۹۵/۱ گرم $GaF_3$ را حساب می‌کنیم؛ با توجه به این‌که در هر مول $GaF_3$، ۴ مول یون وجود دارد، خواهیم داشت:

$$95/1\ g\ GaF_3 \times \frac{1\ mol\ GaF_3}{126/8\ g\ GaF_3} \times \frac{4\ mol\ \text{یون}}{1\ mol\ GaF_3} \times \frac{6/02\times10^{23}\ \text{یون}}{1\ mol\ \text{یون}} = \frac{95/1\times4\times6/02\times10^{23}}{126/8} = 18/06\times10^{23}\ \text{یون}$$

## تست و پاسخ ۷۷

**کدام مورد درست است؟**

۱) طیف نشری خطی عنصری که اتم آن تنها دو ذرهٔ زیراتمی دارد، در گسترهٔ امواج الکترومغناطیس دارای ۴ خط است.

۲) اگر طول موج‌ها در طیف نشری خطی دو عنصر یکسان باشد، آن دو عنصر خواص شیمیایی مشابهی دارند.

۳) اگر زیرلایه‌های ۳s تا ۶s به ترتیب پرشدن مرتب شوند، ۳ زیرلایه با $n+l=5$ در میان آن‌ها وجود خواهد داشت.

۴) قاعدهٔ آفبا آرایش الکترونی همهٔ عنصرها تا عدد اتمی ۲۳ را به درستی پیش‌بینی می‌کند؛ اما تا عدد اتمی ۳۶، تنها یک عنصر از این قاعده پیروی نمی‌کند.

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**پاسخ تشریحی** بررسی گزینه‌ها:

۱) عنصری که اتم آن فقط دو ذرهٔ زیراتمی دارد، همان $^1_1H$ با ۱ پروتون و ۱ الکترون است. طیف نشری خطی هیدروژن در **گسترهٔ مرئی**، دارای ۴ خط است و نه در کل گسترهٔ امواج الکترومغناطیسی! ✗

۲) طیف نشری خطی عنصرها منحصربه‌فرد است و امکان ندارد طول موج‌ها در طیف نشری خطی دو عنصر کاملاً یکسان باشد. ✗

۳)

**نکته** ترتیب پرشدن زیرلایه‌ها مطابق قاعدهٔ آفبا، به صورت مقابل است: $1s^2 2s^2 2p^3 3s^3 3p^4 4s^3 3d^4 5p^5 4s^4 5d^5 6p^6 5s^4 4f^5 5d^6 6p^7 5s^5 4f^6 5d^7 6p$

ترتیب پرشدن زیرلایه‌ها از ۳s تا ۶s به صورت زیر است: ✓

$$3s \rightarrow 3p \rightarrow 4s \rightarrow 3d \rightarrow 4p \rightarrow 5s \rightarrow 4d \rightarrow 5p \rightarrow 6s$$

$n+l$: $3+0=3$ $3+1=4$ $4+0=4$ $3+2=5$ $4+1=5$ $5+0=5$ $4+2=6$ $5+1=6$ $6+0=6$

($3+2=5$ تا $5+0=5$: ۳ زیرلایه با $n+l=5$)

۴) در بین عنصرهایی با عدد اتمی ۱ تا ۳۶، آرایش الکترونی دو عنصر $(_{24}Cr, _{29}Cu)$ از قاعدهٔ آفبا پیروی نمی‌کند. ✗

$$_{29}Cu \Rightarrow \begin{cases} \text{آرایش الکترونی مورد انتظار}: [_{18}Ar]3d^9 4s^2 \\ \text{آرایش الکترونی واقعی}: [_{18}Ar]3d^{10} 4s^1 \end{cases}$$

$$_{24}Cr \Rightarrow \begin{cases} \text{آرایش الکترونی مورد انتظار}: [_{18}Ar]3d^4 4s^2 \\ \text{آرایش الکترونی واقعی}: [_{18}Ar]3d^5 4s^1 \end{cases}$$

## تست و پاسخ ۷۸

در چه تعداد از ردیف‌های جدول زیر، همهٔ داده‌های گزارش‌شده درست است؟

| ردیف | نام | فرمول شیمیایی | شمار الکترون‌های آخرین زیرلایهٔ اشغال‌شدهٔ کاتیون | عدد اکسایش اتم مشخص‌شده |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | $Mn(HCO_3)_2$ | منگنز هیدروژن کربنات | ۵ | $C = +4$ |
| ۲ | $Cr_3(PO_4)_2$ | کروم (III) فسفات | ۳ | $P = -3$ |
| ۳ | $Fe(HCO_2)_3$ | آهن (III) فورمات | ۵ | $C = +2$ |
| ۴ | $Ca(NO_3)_2$ | کلسیم نیترات | ۶ | $N = +5$ |

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**نکته** یون‌های چندتایی کنکور:

| نام یون | فرمول یون | نام یون | فرمول یون |
|---|---|---|---|
| آمونیوم | $NH_4^+$ | سولفات | $SO_4^{2-}$ |
| هیدروکسید | $OH^-$ | فسفات | $PO_4^{3-}$ |
| نیترات | $NO_3^-$ | کربنات | $CO_3^{2-}$ |
| پرکلرات | $ClO_4^-$ | اتانوات (استات) | $CH_3COO^-$ |
| هیدروژن کربنات | $HCO_3^-$ | سیلیکات | $SiO_4^{4-}$ |
| سیانید | $CN^-$ | پرمنگنات | $MnO_4^-$ |
| متانوات (فورمات) | $HCOO^-$ | | |

**پاسخ تشریحی** همهٔ داده‌های ردیف‌های ۳ و ۴ جدول، کاملاً درست‌اند.

بررسی ردیف‌های جدول:

ردیف (۱): منگنز دارای چند نوع کاتیون پایدار است؛ بنابراین در نام‌گذاری ترکیب‌های آن باید از اعداد رومی استفاده کرد؛ در نتیجه نام درست $Mn(HCO_3)_2$، منگنز (II) هیدروژن کربنات است.

$$_{25}Mn : [_{18}Ar]3d^5 4s^2 \Rightarrow {}_{25}Mn^{2+} : [_{18}Ar]\underbrace{3d^5}_{\text{۵ الکترون در آخرین زیرلایه}}$$

$$HCO_3^- : (+1) + C + 3(-2) = -1 \Rightarrow C = +4$$

ردیف (۲): نام $Cr_3(PO_4)_2$، کروم (II) فسفات است.

$$_{24}Cr : [_{18}Ar]3d^5 4s^1 \Rightarrow {}_{24}Cr^{2+} : [_{18}Ar]\underbrace{3d^4}_{\text{۴ الکترون در آخرین زیرلایه}}$$

$$PO_4^{3-} : P + 4(-2) = -3 \Rightarrow P = +5$$

ردیف (۳): نام $Fe(HCO_2)_3$ یا همان $Fe(HCOO)_3$، آهن (III) متانوات یا آهن (III) فورمات است.

$$_{26}Fe : [_{18}Ar]3d^6 4s^2 \Rightarrow {}_{26}Fe^{3+} : [_{18}Ar]\underbrace{3d^5}_{\text{۵ الکترون در آخرین زیرلایه}}$$

$$HCOO^- : (+1) + C + 2(-2) = -1 \Rightarrow C = +2$$

ردیف (۴): نام $Ca(NO_3)_2$، کلسیم نیترات است.

$$_{20}Ca:[_{18}Ar]4s^2 \Rightarrow {}_{20}Ca^{2+}:[_{18}Ar]:[_{10}Ne]3s^2\ \underbrace{3p^6}_{\text{۶ الکترون در آخرین زیرلایه}}$$

$$NO_3^-: N+3(-2)=-1 \Rightarrow N=+5$$

## تست و پاسخ ۷۹

**کدام مطلب درست است؟**

۱) مولکول‌های دواتمی فراوان و جورهستهٔ هواکره، نقشی در جذب پرتوهای فروسرخ خورشیدی و افزایش دمای کرهٔ زمین ندارند.

۲) تروپوسفر، چگال‌ترین لایهٔ هواکره است و برخلاف استراتوسفر، از نظر الکتریکی خنثی است.

۳) در فرایند تهیهٔ هوای مایع، پس از عبور هوا از صافی، با استفاده از سرما، دمای هوا را پیوسته کاهش می‌دهند.

۴) در ساختار لوویس فراوان‌ترین گاز هواکره و گاز سمی حاصل از سوختن ناقص هیدروکربن‌ها، برخلاف ساختار لوویس مولکول اتین، پیوند سه‌گانه وجود دارد.

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**پاسخ تشریحی** مولکول‌های دواتمی فراوان و جورهستهٔ هواکره، همان گازهای $N_2$ و $O_2$ هستند که گاز گلخانه‌ای محسوب نمی‌شوند، بنابراین نقشی در اثر گلخانه‌ای و افزایش دمای کرهٔ زمین ندارند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ با افزایش ارتفاع از سطح زمین، شمار ذره‌ها در واحد حجم هوا کاهش می‌یابد؛ بنابراین اولین لایهٔ هواکره یعنی تروپوسفر، چگال‌ترین لایهٔ هواکره محسوب می‌شود؛ *پس قسمت اول عبارت، درسته! مشکل از قسمت دومه!* زیرا تا ارتفاع ۸۰ کیلومتری از سطح زمین که شامل لایه‌های تروپوسفر، استراتوسفر و مزوسفر می‌باشد، فقط ذره‌های خنثی در هواکره وجود دارند و ۳ لایهٔ اول خنثی محسوب می‌شوند. ذره‌های باردار مانند $He^+$، $N_2^+$ و ...، از ارتفاع ۸۰ کیلومتری به بعد *سروکلشون در هوا پیدا می‌شه!*

۳ در فرایند تقطیر جزءبه‌جزء هوای مایع، با استفاده از **فشار**، دمای هوا را پیوسته کاهش می‌دهند.

۴ فراوان‌ترین گاز هواکره، $N_2$ و گاز سمی حاصل از سوختن ناقص هیدروکربن‌ها، CO می‌باشد؛ درضمن اتین، نخستین عضو خانوادهٔ آلکین‌ها است. در ساختار هر سه مولکول، پیوند سه‌گانه وجود دارد.

$:N\equiv N:$ $:C\equiv O:$ $H-C\equiv C-H$

## تست و پاسخ ۸۰

**در جدول زیر نقطهٔ جوش سه گاز اصلی سازندهٔ هوای پاک و خشک، آلوتروپ ناپایدار اکسیژن و مواد شرکت‌کننده در واکنش هابر آورده شده است. با توجه به این جدول، کدام موارد از مطالب زیر درست‌اند؟ (نمادها فرضی هستند.)**

| گاز | A | B | C | D | E | G |
|---|---|---|---|---|---|---|
| نقطهٔ جوش (کلوین) | ۲۴۰ | ۱۶۱ | ۹۰ | ۷۷ | ۲۰ | ۸۷ |

**الف) انحلال گاز A در آب، خصلت شیمیایی بیشتری نسبت به انحلال گاز D در آب دارد.**

**ب) گاز G، بی‌رنگ، بی‌بو، غیرآتش‌گیر و غیرسمی است که در واکنش‌های شیمیایی شرکت نمی‌کند.**

**پ) در دما و فشار اتاق، مخلوط گازهای E و C در حضور کاتالیزگر به سرعت واکنش می‌دهند، اما مخلوط گازهای E و D در حضور کاتالیزگر و جرقه هم واکنش نمی‌دهند.**

**ت) گاز B برخلاف گاز A، در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند.**

۱) الف ـ ب ـ ت ۲) الف ـ پ ۳) ب ـ پ ۴) الف ـ ب ـ پ

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**پاسخ تشریحی** عبارت‌های «الف»، «ب» و «پ» درست‌اند.

مقایسهٔ نقطهٔ جوش مواد داده‌شده به صورت زیر است:

$$\text{نقطهٔ جوش}: \underbrace{NH_3}_{-33^\circ C} > \underbrace{O_3}_{-112^\circ C} > \underbrace{O_2 > Ar > N_2 > H_2}_{\text{مولکول‌های ناقطبی}}$$

$NH_3$: پیوند هیدروژنی — $O_3$: مولکول قطبی — $O_2$: $-183^\circ C$، $Ar$: $-186^\circ C$، $N_2$: $-196^\circ C$، $H_2$: $-253^\circ C$

$A \to NH_3$ $\quad B \to O_3$ $\quad C \to O_2$

$G \to Ar$ $\quad D \to N_2$ $\quad E \to H_2$

بررسی عبارت‌ها:

الف) $A$ و $D$ به ترتیب $NH_3$ و $N_2$ هستند. آمونیاک در آب یونیده می‌شود $(NH_3(aq) + H_2O(l) \rightleftharpoons NH_4^+(aq) + OH^-(aq))$، ولی $N_2$ کاملاً به صورت مولکولی در آب حل می‌شود؛ بنابراین، می‌توان گفت انحلال آمونیاک در آب، یک فرایند شیمیایی و انحلال نیتروژن در آب، یک فرایند فیزیکی است.

ب) گاز $G$ همان گاز نجیب آرگون است که بی‌رنگ، بی‌بو، غیرآتش‌گیر، غیرسمی و واکنش‌ناپذیر است.

پ) در دما و فشار اتاق، گازهای هیدروژن $(E)$ و اکسیژن $(C)$ در حضور کاتالیزگر یا جرقه، به شدت با هم واکنش می‌دهند؛ در حالی که گازهای هیدروژن $(E)$ و نیتروژن $(D)$ در این شرایط، هیچ واکنشی با هم نمی‌دهند.

ت) هر دو مولکول $O_3(B)$ و $NH_3(A)$، قطبی‌اند و در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کنند.

## تست و پاسخ ۸۱

**با توجه به معادلهٔ واکنش زیر، به ازای مصرف ۱۷ گرم محلول ۵۰ درصد جرمی هیدروژن پراکسید، تفاوت جرم فراورده‌های یونی تولیدشده چند گرم است و در این واکنش چند لیتر گاز اکسیژن در شرایط استاندارد تشکیل می‌شود؟**

**$(Mn = 55 , K = 39 , S = 32 , O = 16, H = 1 : g.mol^{-1})$ (موازنهٔ معادلهٔ واکنش کامل شود.)**

$$2KMnO_4(aq) + 3H_2SO_4(aq) + 5H_2O_2(aq) \to aK_2SO_4(aq) + bMnSO_4(aq) + cO_2(g) + dH_2O(l)$$

۱) ۵/۶ ـ ۱/۱۵ ۲) ۴/۸ ـ ۱/۱۵ ۳) ۴/۸ ـ ۶/۴ ۴) ۵/۶ ـ ۶/۴

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**پاسخ تشریحی** ابتدا باید موازنهٔ معادلهٔ واکنش را کامل کنیم.

$$2KMnO_4 + 3H_2SO_4 + 5H_2O_2 \to aK_2SO_4 + bMnSO_4 + cO_2 + dH_2O$$

موازنهٔ K: $2 = 2a \Rightarrow a = 1$

موازنهٔ Mn: $2 = b$

موازنهٔ H: $(3 \times 2) + (5 \times 2) = 2d \Rightarrow d = 8$

موازنهٔ O: $(2 \times 4) + (3 \times 4) + (5 \times 2) = 4 + (2 \times 4) + 2c + 8 \Rightarrow c = 5$

پس معادلهٔ موازنه‌شدهٔ کامل به صورت زیر است:

$$2KMnO_4 + 3H_2SO_4 + 5H_2O_2 \to \underbrace{K_2SO_4 + 2MnSO_4}_{\text{فراورده‌های یونی}} + 5O_2 + 8H_2O$$

حالا تفاوت جرم $K_2SO_4(A)$ و $MnSO_4(B)$ و همچنین حجم گاز تولیدشده را حساب می‌کنیم:

$$\underbrace{\frac{\frac{\text{درصد جرمی}}{100} \times \text{جرم محلول}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}}_{H_2O_2} = \underbrace{\frac{\text{تفاوت جرم}}{|(\text{جرم مولی A} \times \text{ضریب A}) - (\text{جرم مولی B} \times \text{ضریب B})|}}_{K_2SO_4 - MnSO_4} = \underbrace{\frac{\text{حجم}}{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}}}_{O_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{17} \times \frac{50}{100}}{5 \times \frac{34}{2}} = \frac{x}{|(1 \times 174) - (2 \times 151)|} = \frac{y}{5 \times 22/4} \Rightarrow \frac{1}{20} = \frac{x}{128} = \frac{y}{112} \Rightarrow \begin{cases} x = 6/4\,g \\ y = 5/6\,L \end{cases}$$

## تست و پاسخ ۸۲

**انحلال‌پذیری گاز اکسیژن در آب، در دمای $20^\circ C$ و فشار P اتمسفر برابر a گرم است. اگر در محلول سیرشده از این گاز در دمای $20^\circ C$ و فشار $2/5\ P$، غلظت گاز اکسیژن برابر $1/25\times10^{-2}$ مولار باشد، مقدار a کدام است؟ $(O=16\ g.mol^{-1})$**

۱) ۰/۰۱۴ ۲) ۰/۰۰۴ ۳) ۰/۰۱۶ ۴) ۰/۰۰۶

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**نکات**

۱) طبق قانون هنری، انحلال‌پذیری گازها با فشار، رابطهٔ مستقیم دارد و با n برابر شدن فشار، انحلال‌پذیری گازها در آب نیز n برابر می‌شود.

۲) برای گازهایی مانند $N_2$، $O_2$ و NO که انحلال‌پذیری ناچیزی در آب دارند، مقدار درصد جرمی محلول به تقریب با انحلال‌پذیری گاز (S) برابر و هم‌چنین چگالی محلول به تقریب با چگالی آب $(1g.mL^{-1})$ برابر است؛ بنابراین، غلظت مولی محلول سیرشدهٔ این گازها در آب را می‌توان به صورت زیر حساب کرد:

$$\text{غلظت مولی}=\frac{10S}{\text{جرم مولی}}\xrightarrow{a=S,d=1}\text{غلظت مولی}=\frac{10\times(a)\times\text{درصد جرمی}\times(d)\ \text{چگالی}}{\text{جرم مولی}}$$

**پاسخ تشریحی** با ۲/۵ برابر شدن فشار، انحلال‌پذیری گاز نیز ۲/۵ برابر می‌شود:

$$S=2/5a$$

$$\text{غلظت مولی}=\frac{10S}{\text{جرم مولی}}\Rightarrow 1/25\times10^{-2}=\frac{10\times2/5\ a}{32}\Rightarrow 20a=0/32\Rightarrow a=\frac{32}{2}\times10^{-3}=0/016g$$

## تست و پاسخ ۸۳

**درستی یا نادرستی چه تعداد از عبارت‌های زیر، مانند درستی یا نادرستی عبارت درون کادر است؟**

**یکی از اتم‌های سازندهٔ هر ترکیب یونی به یقین فلز است.**

- **اگر در فرایند انحلال یک ماده در آب، حل‌شونده ویژگی ساختاری خود را حفظ نکند، آن ماده به یقین ترکیبی یونی است.**
- **در ساختار لوویس مولکول‌ها، مجموع شمار الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی همهٔ اتم‌ها، برابر ۸ است.**
- **در مدل فضاپرکن، موقعیت سه‌بعدی اتم‌ها در مولکول با کره‌هایی که شعاع آن‌ها متناسب با شعاع اتم‌ها است، نشان داده می‌شود.**
- **فرمول مولکولی ترکیب‌های یونی، افزون بر نوع عنصرها، ساده‌ترین نسبت بین کاتیون و آنیون سازنده را نیز نشان می‌دهد.**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**پاسخ تشریحی** عبارت داخل کادر نادرست است.

**نکته** یکی از عنصرهای سازندهٔ هر ترکیب یونی دوتایی به یقین فلز است، اما در ساختار ترکیب‌های یونی چندتایی، به دلیل وجود کاتیون‌ها و آنیون‌های چنداتمی، ممکن است فلزی وجود نداشته باشد؛ به عنوان نمونه، همهٔ عنصرهای سازندهٔ آمونیوم کلرید $(NH_4Cl)$ و آمونیوم سولفات $((NH_4)_2SO_4)$، نافلزند.

بررسی عبارت‌ها:

- ممکن است یک ترکیب مولکولی نیز هنگام انحلال در آب، ویژگی ساختاری خود را حفظ نکند؛ مانند HCl که با انحلال در آب، یونیده می‌شود و انحلال آن، یونی است:

$$HCl(g)\xrightarrow{\text{آب}}H^+(aq)+Cl^-(aq)$$

- *غلط!* مثلاً اتم هیدروژن همواره دوتایی می‌شود و نه هشت‌تایی!
- درست است.
- در ساختار ترکیب‌های یونی، مولکول‌های مجزا وجود ندارند؛ بنابراین به کار بردن واژهٔ «فرمول مولکولی» برای ترکیب‌های یونی *نادرست!* *باید می‌گفت فرمول شیمیایی* ☺.

## تست و پاسخ ۸۴

**محلولی از پتاسیم نیترات به جرم ۲/۵ کیلوگرم در دمای $50^\circ C$، دارای ۲۳۴ گرم یون پتاسیم است. با توجه به این‌که انحلال‌پذیری پتاسیم نیترات در این دما برابر ۸۰ گرم در ۱۰۰ گرم آب است، در همین شرایط، حداکثر چند مول دیگر از این نمک را می‌توان در این محلول حل کرد؟ (جرم مولی پتاسیم نیترات و پتاسیم را به ترتیب تقریباً ۱۰۰ و ۳۹ گرم بر مول در نظر بگیرید.)**

۱) ۶ ۲) ۹/۲ ۳) ۱۲/۵ ۴) ۱۴

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**خودت حل کنی بهتره** ابتدا با توجه به مقدار یون پتاسیم در محلول، جرم $KNO_3$ و جرم آب موجود در محلول را به *دست بیار!* بعد با توجه به مقدار آب و انحلال‌پذیری $KNO_3$، حساب کن که حداکثر چند مول پتاسیم نیترات را می‌توان در آب حل کرد. اختلاف عدد محاسبه‌شده و مول اولیهٔ $KNO_3$ موجود در محلول، جواب سؤال است.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** با استفاده از مقدار $K^+$، جرم $KNO_3$ و جرم آب موجود در محلول را به دست می‌آوریم:

$$۲۳۴\,g\,K^+ \times \frac{۱\,mol\,K^+}{۳۹\,g\,K^+} \times \frac{۱\,mol\,KNO_3}{۱\,mol\,K^+} = ۶\,mol\,KNO_3$$

$$\text{جرم } KNO_3 \text{ موجود در محلول} = ۶\,mol \times \frac{۱۰۰\,g}{۱\,mol} = ۶۰۰\,g$$

$$\text{جرم آب} = \text{جرم محلول} - \text{جرم } KNO_3 = ۲۵۰۰ - ۶۰۰ = ۱۹۰۰\,g$$

**گام دوم:** با استفاده از انحلال‌پذیری $KNO_3$ در دمای $50^\circ C$، حساب می‌کنیم که در ۱۹۰۰ گرم آب، حداکثر چند مول پتاسیم نیترات می‌توان حل کرد.

$$۱۹۰۰\,g\,\text{آب} \times \frac{۸۰\,g\,KNO_3}{۱۰۰\,g\,\text{آب}} \times \frac{۱\,mol\,KNO_3}{۱۰۰\,g\,KNO_3} = ۱۵/۲\,mol\,KNO_3$$

**گام سوم:** حداکثر می‌توان ۱۵/۲ مول پتاسیم نیترات را در این مقدار آب حل کرد، ولی فقط ۶ مول حل شده است؛ بنابراین می‌توان ۱۵/۲ − ۶ = ۹/۲ مول دیگر پتاسیم نیترات را در محلول حل کرد.

## تست و پاسخ ۸۵

**با توجه به ویژگی‌های بیان‌شده برای دو عنصر (الف) و (ب) که به ۴ دورهٔ اول جدول تناوبی تعلق دارند، کدام نتیجه‌گیری درست است؟**

**الف) فلزی است که مجموع ارقام عدد اتمی آن با عدد اتمی نخستین عنصر دستهٔ p جدول تناوبی برابر است.**

**ب) نافلزی از دورهٔ دوم است که مجموع $n+l$ الکترون‌های بیرونی‌ترین زیرلایهٔ آن، با عدد اتمی آن برابر است.**

۱) نماد شیمیایی عنصر (ب) برخلاف عنصر (الف)، تک‌حرفی است.

۲) شعاع اتمی عنصر (ب) از شعاع اتمی اکسنده‌ترین عنصر جدول تناوبی، کوچک‌تر است.

۳) محلول آبی عنصر (الف) با عدد اکسایش ۴+، به رنگ زرد است.

۴) مجموع عدد اتمی عنصرهای (الف) و (ب)، برابر با عدد اتمی نخستین عنصری است که لایهٔ الکترونی سوم آن به طور کامل پر می‌شود.

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**پاسخ تشریحی** ابتدا باید عنصرهای (الف) و (ب) را پیدا کنیم.

الف) نخستین عنصر دستهٔ p، عنصر $_5B$ $(1s^2 2s^2 2p^1)$ است؛ بنابراین، مجموع ارقام عدد اتمی فلز A باید برابر ۵ باشد؛ در نتیجه عنصر A همان وانادیم $(_{23}V)$ می‌باشد. دقت کنید که مجموع ارقام عدد اتمی $_{14}Si$ و $_{32}Ge$ نیز برابر ۵ است، اما این دو عنصر شبه‌فلزند.

ب) در بین نافلزهای دورهٔ دوم، فقط برای کربن، مجموع $(n+l)$ الکترون‌های بیرونی‌ترین زیرلایه با عدد اتمی برابر است:

$$_6C: [_2He]2s^2 2p^2 \Rightarrow (2p)\text{الکترون‌های بیرونی‌ترین زیرلایه}(n+l) = 2(2+1) = 6$$

بررسی گزینه‌ها:

۱) نماد شیمیایی هر دو عنصر (الف) و (ب) تک‌حرفی ($_{6}C$ ، $_{23}V$) است.

۲) اکسنده‌ترین عنصر جدول، فلوئور ($_{9}F$) است. با توجه به این‌که در یک دوره از چپ به راست، شعاع اتمی کاهش می‌یابد، شعاع اتمی $_{6}C$ از $_{9}F$ بزرگتر است.

۳) محلول آبی وانادیم با عدد اکسایش ۴+ به رنگ آبی است.

| محلول | رنگ |
|---|---|
| نمک وانادیم (V) | زرد |
| نمک وانادیم (IV) | آبی |
| نمک وانادیم (III) | سبز |
| نمک وانادیم (II) | بنفش |

۴) مجموع عدد اتمی عنصرهای (الف) و (ب) برابر با $۲۹ = ۶ + ۲۳$ است. عنصر $_{29}Cu$، نخستین عنصری از جدول است که لایهٔ سوم آن $(n = ۳)$ به طور کامل پر و ۱۸ الکترونی می‌شود.

$$_{29}Cu : [_{18}Ar]3d^{10}4s^{1}$$

## تست و پاسخ ۸۶

**چند مورد از مطالب زیر، دربارهٔ واکنش داده‌شده، درست است؟ $(O = ۱۶, K = ۳۹, Cr = ۵۲ : g.mol^{-1})$**

**$K_2Cr_2O_7(s) \rightarrow K_2CrO_4(s) + Cr_2O_3(s) + O_2(g)$ (معادلهٔ شیمیایی موازنه نشده است.)**

- **پس از موازنهٔ معادله، مجموع ضرایب فراورده‌ها، ۲/۲۵ برابر ضریب واکنش‌دهنده است.**
- **با انجام واکنش، حدود ۸ درصد از جرم نمونهٔ جامد اولیه کاسته می‌شود.**
- **براساس معادلهٔ موازنه‌شده، ۵۰ درصد اتم‌های کروم، تغییر عدد اکسایش نداشته‌اند.**
- **اگر واکنش با بازده ۷۰ درصد انجام شود، به ازای تولید ۷۶ گرم ترکیب یونی دوتایی، ۱۶/۸ گرم گاز اکسیژن نیز تولید می‌شود.**

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**پاسخ تشریحی** عبارت‌های اول تا سوم درست‌اند.

معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش به صورت زیر است:

$$۴K_2Cr_2O_7(s) \rightarrow ۴K_2CrO_4(s) + ۲Cr_2O_3(s) + ۳O_2(g)$$

بررسی عبارت‌ها:

$$\frac{\text{مجموع ضرایب فراورده‌ها}}{\text{ضریب واکنش‌دهنده}} = \frac{۴+۲+۳}{۴} = \frac{۹}{۴} = \frac{۸}{۴} + \frac{۱}{۴} = ۲/۲۵$$

- کاهش جرم نمونهٔ جامد اولیه، به دلیل تولید گاز اکسیژن است.

$$K_2Cr_2O_7 \text{ جرم مولی} = (۲\times۳۹) + (۲\times۵۲) + (۷\times۱۶) = ۲۹۴ g.mol^{-1}$$

$$K_2Cr_2O_7 \text{ جرم ۴ مول} = ۴\times۲۹۴ = ۱۱۷۶ g$$

$$O_2 \text{ تولیدشده: جرم} = ۳\times۳۲ = ۹۶ g$$

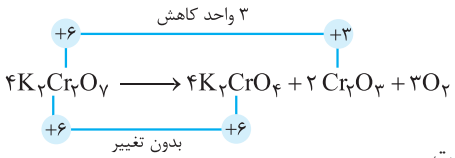
$$\text{درصد کاهش جرم} = \frac{O_2 \text{ جرم}}{\text{جرم جامد اولیه}} \times ۱۰۰ = \frac{\overset{۱۲}{\cancel{۹۶}}}{\underset{۱۴۷}{\cancel{۱۱۷۶}}} \times ۱۰۰ \simeq \frac{۱۲۰۰}{۱۵۰} \simeq ٪۸$$

- از ۸ اتم کروم اولیه، ۴ اتم آن تغییر عدد اکسایش نداشته‌اند.

$K_2Cr_2O_7 : 2(+1) + 2Cr + 7(-2) = 0 \Rightarrow Cr = +6$

$K_2CrO_4 : 2(+1) + Cr + 4(-2) = 0 \Rightarrow Cr = +6$

$Cr_2O_3 : 2Cr + 3(-2) = 0 \Rightarrow Cr = +3$




ترکیب یونی دوتایی تولیدشده $Cr_2O_3$ است.

روش اول: کسر تبدیل:

$$76\,g\,Cr_2O_3 \times \frac{1\,mol\,Cr_2O_3}{152\,g\,Cr_2O_3} \times \frac{3\,mol\,O_2}{2\,mol\,Cr_2O_3} \times \frac{32\,g\,O_2}{1\,mol\,O_2} = 24\,g\,O_2$$

روش دوم: کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم‌مولی} \times \text{ضریب}}_{Cr_2O_3}} = \frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم‌مولی} \times \text{ضریب}}_{O_2}} \Rightarrow \frac{76}{2 \times 152} = \frac{x}{3 \times 32} \Rightarrow x = 24\,g\,O_2$$

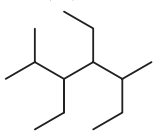
**دام‌تستی** وقتی می‌خواهیم مقدار یک فراورده را از روی مقدار یک فراوردهٔ دیگر حساب کنیم، نباید بازده درصدی را در محاسبات وارد کنیم. در *این‌جا اگه اشتباهی بازده واکنش را در محاسبات دخیل می‌کردین*، به عدد $24 \times \frac{70}{100} = 16/8$ گرم برای اکسیژن *می‌رسیدین!*

## تست و پاسخ ۸۷

**با توجه به ساختار سه هیدروکربن سیرشدهٔ زیر، کدام مورد نادرست است؟ $(H = 1, C = 12 : g.mol^{-1})$**

a) $CH_3-CH_2-CH_2-CH(CH_3)-CH(CH_3)-CH_3$ با شاخهٔ اضافی $CH_3-CH(CH_3)-CH_3$ روی کربن شمارهٔ ۳

b) $(CH_3)_2CHCH_2CH(C_2H_5)CH_2CH(C_2H_5)_2$

c) 

۱) شمار اتم‌های کربن در زنجیر اصلی هر سه هیدروکربن، متفاوت است.

۲) مجموع اعداد به‌کاررفته در نام‌گذاری ترکیب c به روش آیوپاک، با عدد اتمی تنها شبه‌فلز دورهٔ سوم جدول تناوبی، برابر است.

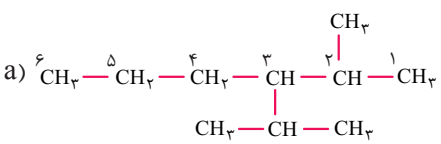
۳) ترکیب a در ساختار خود، شاخهٔ فرعی اتیل ندارد.

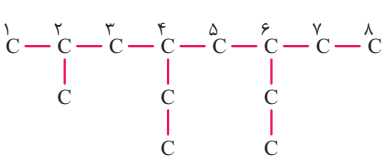
۴) تفاوت جرم مولی دو ترکیب b و c برابر ۱۴ گرم است.

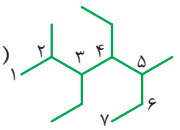
**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**پاسخ تشریحی** بررسی گزینه‌ها:

۱) زنجیر اصلی ترکیب‌های a، b و c به ترتیب ۶، ۸ و ۷ اتم کربن دارد.

a) 

b) 

c) 

۲) نام ترکیب c، ۴،۳ ـ دی‌اتیل ۵،۲– دی‌متیل هپتان است. مجموع اعداد در نام این ترکیب، برابر با $14 = 5 + 2 + 4 + 3$ است. تنها شبه‌فلز دورهٔ سوم نیز سیلسیم با عدد اتمی ۱۴ ($_{14}Si$) می‌باشد.

۳) با توجه به ساختار ترکیب (a)، معلومه که این ترکیب، شاخهٔ فرعی اتیل ($-CH_2CH_3$) ندارد.

۴) هر دو ترکیب b و c، ۱۳ اتم کربن دارند؛ یعنی فرمول مولکولی آن‌ها ($C_{13}H_{28}$) یکسان و جرم مولی آن‌ها برابر است.

## تست و پاسخ ۸۸

**۸/۴ گرم از یک هیدروکربن ($C_xH_y$) با ۱۸ لیتر گاز اکسیژن با چگالی $1/6\ g.L^{-1}$ به طور کامل می‌سوزد. بر این اساس، کدام گزینه دربارهٔ آن نادرست است؟ ($H=1,\ C=12,\ O=16 : g.mol^{-1}$)**

۱) می‌تواند یک ترکیب حلقوی و سیرشده باشد.

۲) اگر هیدروکربن مورد نظر، ترکیبی زنجیره‌ای و بدون شاخه با ۴ اتم کربن باشد، در واکنش آن با گاز کلر کافی، ترکیبی با نام ۱، ۲–دی‌کلروبوتان تولید می‌شود.

۳) حدود ۸۵/۷۱ درصد جرم آن را کربن تشکیل داده است.

۴) ممکن است ترکیبی باشد که از آن به عنوان عمل‌آورنده در کشاورزی استفاده می‌شود.

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**پاسخ تشریحی** ابتدا باید با توجه به اطلاعات داده‌شده، فرمول هیدروکربن مورد نظر را به دست آوریم:

$$C_xH_y + (x+\frac{y}{4})O_2 \rightarrow xCO_2 + \frac{y}{2}H_2O$$

$$\frac{\text{جرم}}{\underbrace{\text{جرم‌مولی}\times\text{ضریب}}_{C_xH_y}} = \frac{\text{حجم}\times\text{چگالی}}{\underbrace{\text{جرم‌مولی}\times\text{ضریب}}_{O_2}} \Rightarrow \frac{8/4}{12x+y} = \frac{1/6\times 18}{(x+\frac{y}{4})\times 32}$$

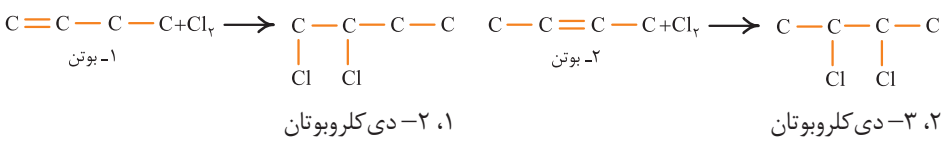
$$\Rightarrow 28x+7y=36x+3y \Rightarrow 4y=8x \Rightarrow y=2x \Rightarrow \text{فرمول هیدروکربن}: C_xH_{2x}$$

بررسی گزینه‌ها:

۱) ترکیب مورد نظر که شمار اتم‌های هیدروژن آن دو برابر شمار اتم‌های کربن آن است، می‌تواند از خانوادهٔ آلکن‌ها یا سیکلوآلکان‌ها باشد. سیکلوآلکان‌ها، حلقوی و سیرشده هستند.

۲) در بین آلکن‌ها و سیکلوآلکان‌ها، آلکن‌ها، زنجیره‌ای محسوب می‌شوند.

دو آلکن ۴کربنهٔ بدون شاخه وجود دارد؛ بنابراین، در واکنش با گاز کلر می‌توان دو نوع فراورده تولید کرد:




۳) درصد جرمی کربن در همهٔ آلکن‌ها و سیکلوآلکان‌ها، برابر و حدود ۸۵/۷۱ درصد است:

$$\text{درصد جرمی کربن در } C_xH_{2x} = \frac{12x}{14x}\times 100 = \frac{6}{7}\times 100 \simeq \%85/71$$

۴) از اتن ($C_2H_4$) که عضوی از خانوادهٔ آلکن‌ها است، به عنوان عمل‌آورنده در کشاورزی استفاده می‌شود.

## تست و پاسخ ۸۹

**واکنش زیر، سوختن استیک اسید در دمای اتاق را نشان می‌دهد. اگر گرمای لازم برای تبخیر ۱ مول استیک اسید و آب به ترتیب برابر ۲۴ و ۴۲ کیلوژول باشد، مجموع آنتالپی پیوندهای C=O و O—H برابر چند کیلوژول بر مول است؟**

$$C_2H_4O_2(l)+2O_2(g)\rightarrow 2CO_2(g)+2H_2O(l) \qquad \Delta H=-486\,kJ$$

| پیوند | O=O | C—H | C—C | C—O |
|---|---|---|---|---|
| آنتالپی پیوند ($kJ.mol^{-1}$) | ۵۰۰ | ۴۱۵ | ۳۵۱ | ۳۸۰ |

۱) ۱۰۳۰ ۲) ۱۱۳۴ ۳) ۱۳۱۴ ۴) ۱۳۰۰

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**نکته** به شرطی می‌توان از آنتالپی‌های پیوند برای محاسبهٔ $\Delta H$ یک واکنش استفاده کرد که همهٔ مواد شرکت‌کننده در آن واکنش، به حالت گاز باشند.

$$\Delta H(\text{واکنش}) = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}]$$

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** به کمک اطلاعات داده‌شده و به کمک قانون هس، آنتالپی سوختن واکنش استیک اسید، در حالتی که همهٔ مواد شرکت‌کننده به حالت گازند را حساب می‌کنیم:

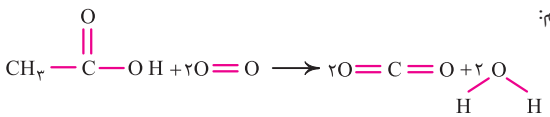
$$C_2H_4O_2(l) + 2O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g) + 2H_2O(l) \quad \Delta H_1 = -486\ kJ$$

$$C_2H_4O_2(g) \rightarrow C_2H_4O_2(l) \quad \Delta H_2 = -24\ kJ$$

$$2H_2O(l) \rightarrow 2H_2O(g) \quad \Delta H_3' = 2(42) = 84\ kJ$$

$$C_2H_4O_2(g) + 2O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g) + 2H_2O(g) \quad \Delta H\ (\text{واکنش}) = -486 - 24 + 84 = -426\ kJ$$

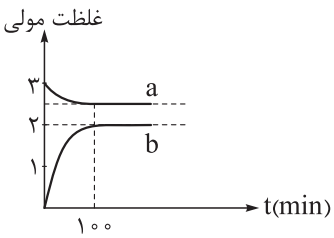
**گام دوم:** رابطهٔ محاسبهٔ $\Delta H$ واکنش به کمک آنتالپی‌های پیوند را می‌نویسیم:



$$\Delta H\ (\text{واکنش}) = [3\Delta H(C-H) + \Delta H(C-C) + \Delta H(C=O) + \Delta H(C-O) + \Delta H(O-H) + 2\Delta H(O=O)]$$
$$-[4\Delta H(C=O) + 4\Delta H(O-H)]$$
$$-426 = 3(415) + 351 - 3\Delta H(C=O) + 380 - 3\Delta H(O-H) + 2(500) \Rightarrow 3\Delta H(C=O) + 3\Delta H(O-H) = 3402$$
$$\Rightarrow \Delta H(C=O) + \Delta H(O-H) = \frac{3402}{3} = 1134\ kJ.mol^{-1}$$

## تست و پاسخ ۹۰

**قند شیر یا لاکتوز در فرایند تخمیر در حضور آب و طی چند مرحله به لاکتیک اسید تبدیل می‌شود. با توجه به معادلهٔ کلی این فرایند و نمودار غلظت ـ زمان رسم‌شده برای آن، کدام مطلب درست است؟**




$$C_{12}H_{22}O_{11}(aq) + H_2O(l) \rightleftharpoons 4C_3H_6O_3(aq)$$

۱) نمودار a مربوط به آب و نمودار b مربوط به لاکتیک اسید است.

۲) در ۱۰۰ دقیقهٔ اول واکنش، سرعت تولید فراورده $0/02\ mol.L^{-1}.h^{-1}$ است.

۳) مقدار ثابت تعادل این واکنش برابر ۴ / ۶ است.

۴) در هر لحظه از واکنش قبل از رسیدن به تعادل، غلظت مولی لاکتیک اسید، ۴ برابر غلظت مولی لاکتوز است.

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**پاسخ تشریحی** بررسی گزینه‌ها:

۱) غلظت مواد جامد (s) و مایع خالص (l) ثابت است؛ بنابراین، نمودار a نمی‌تواند مربوط به آب باشد.

۲) در ۱۰۰ دقیقهٔ اول واکنش، غلظت فراورده از صفر به ۲ مولار رسیده است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\overline{R} = \frac{\Delta[C_3H_6O_3]}{\Delta t} = \frac{2\ mol.L^{-1}}{100\ min} \times \frac{60\ min}{1\ h} = 1/2\ mol.L^{-1}.h^{-1}$$

۳) ابتدا باید غلظت تعادلی $C_{12}H_{22}O_{11}$ را به دست آوریم. تا رسیدن به تعادل، غلظت فراورده، ۲ واحد تغییر کرده است. *از اون جایی* *که ضریب* $C_{12}H_{22}O_{11}$، $\frac{1}{4}$ *ضریب فراورده است، غلظتش* $0/5 \times 2 = \frac{1}{4}$ *مولار تغییر می‌کنه؛* بنابراین، غلظت تعادلی $C_{12}H_{22}O_{11}$ برابر با $3 - 0/5 = 2/5$ مولار خواهد بود:

$$K = \frac{[C_3H_6O_3]^4}{[C_{12}H_{22}O_{11}]} = \frac{2^4}{2/5} = \frac{16}{2/5} = \frac{16 \times 2}{5} = 6/4$$

**توجه** مواد جامد و مایع خالص، در عبارت ثابت تعادل نوشته نمی‌شوند.

۴ برابر بودن ضریب استوکیومتری لاکتیک اسید نسبت به لاکتوز، نشان‌دهندهٔ این است که در هر بازهٔ زمانی، تغییر غلظت (نه خود غلظت!) لاکتیک اسید، ۴ برابر تغییر غلظت لاکتوز خواهد بود.

## تست و پاسخ ۹۱

**کدام مطلب در مورد پلیمرها نادرست است؟ $(H=1, C=12, O=16, F=19, Cl=35/5 : g.mol^{-1})$**

۱) جرم مولی تترافلوئورو اتن از جرم مولی پروپن بیشتر و از جرم مولی گلوکز کم‌تر است.

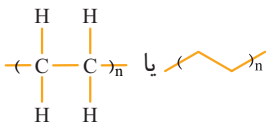
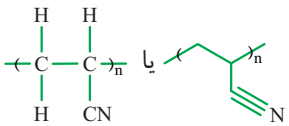
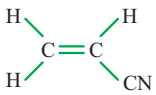
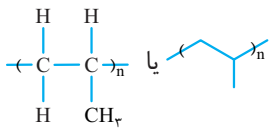
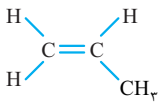
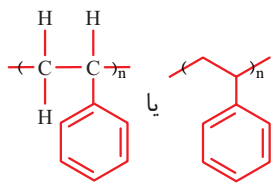
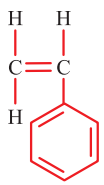
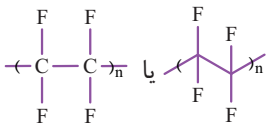
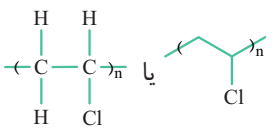
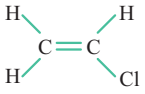
۲) در ساختار پلی‌سیانو اتن و پلی‌استیرن، پیوندهای دوگانه وجود دارد.

۳) درصد جرمی کلر در پلی‌وینیل کلرید بیش از ۵۰ درصد است.

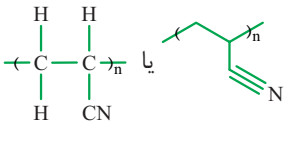
۴) برای تبدیل اتن به پلی‌اتن، از ترکیب‌های محتوی آلومینیم و تیتانیم به عنوان کاتالیزگر استفاده می‌شود.

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

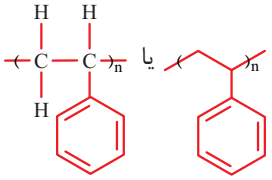
نکته پلی‌اتن و مشتقات آن:

| کاربرد | نام و ساختار پلیمر | نام و ساختار مونومر |
|---|---|---|
| کیسه‌های پلاستیکی، لوله‌های پلاستیکی، دبه‌های آب یا بطری پلاستیکی |  پلی‌اتن | اتن |
| پتو |  پلی‌سیانو اتن |  سیانو اتن |
| به عنوان پلاستیک در تجهیزات آزمایشگاهی و پزشکی مانند سرنگ |  پلی‌پروپن |  پروپن |
| به عنوان پلاستیک در صنعت بسته‌بندی مواد غذایی مانند ظرف یک‌بار مصرف |  پلی‌استیرن |  استیرن |
| ظرف نچسب، نخ دندان، کف اتو، نوارهای آب‌بندی لوله‌ها (نوار تفلون) |  پلی‌تترافلوئورو اتن یا تفلون | تترافلوئورو اتن |
| کیسهٔ خون |  پلی‌وینیل کلرید |  وینیل کلرید (کلرو اتن) |

**پاسخ تشریحی** در ساختار پلی‌سیانو اتن برخلاف پلی‌استیرن، پیوند دوگانه وجود ندارد.



پلی‌سیانو اتن



پلی‌استیرن

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) فرمول مولکولی تترافلوئورو اتن، پروپن و گلوکز به ترتیب به صورت $C_2F_4$، $C_3H_6$ و $C_6H_{12}O_6$ است:

جرم مولی: $\underset{180\,g.mol^{-1}}{C_6H_{12}O_6} > \underset{100\,g.mol^{-1}}{C_2F_4} > \underset{42\,g.mol^{-1}}{C_3H_6}$

۳) $\text{جرم مولی پلی‌وینیل کلرید} = [2(12)+3(1)+35/5]\times n = 62/5\,n\ g.mol^{-1}$

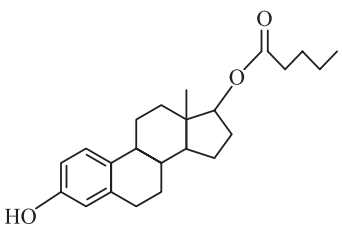
$$\text{درصد جرمی کلر در پلی‌وینیل کلرید} = \frac{\text{مقدار کلر موجود در پلی وینیل کلرید (برحسب گرم)}}{\text{جرم مولی پلی وینیل کلرید (برحسب گرم)}}\times 100 = \frac{35/5\times n}{62/5\,n}\times 100 = \%56/8$$

**نکته** درصد جرمی عنصرها در پلی‌اتن و پلیمرهای مشابه مانند پلی‌پروپن، تفلون و ... همان درصد جرمی عنصرها در مونومر سازندهٔ آن‌ها است و ربطی به n ندارد؛ بنابراین، در این‌جا برای محاسبهٔ درصد جرمی کلر در پلی‌وینیل کلرید، کافی است درصد جرمی آن را در وینیل کلرید محاسبه کنیم.

۴) در تمرین‌های دوره‌ای فصل ۳ کتاب شیمی یازدهم می‌خوانیم که برای تبدیل اتن به پلی‌اتن، از کاتالیزگر محتوی آلومینیم و تیتانیم استفاده می‌شود.

## تست و پاسخ ۹۲

**استرادیول والرات (Estradiol Valerate) یک داروی تزریقی و خوراکی است که در روش‌های کمک باروری به کار می‌رود. براساس ساختار آن، کدام موارد از مطالب زیر، درست است؟ ($H=1, C=12, O=16 : g.mol^{-1}$)**



**الف) به تقریب ۹ درصد جرم آن را هیدروژن تشکیل داده است.**

**ب) فراورده‌های واکنش آبکافت آن، می‌توانند در تولید پلی‌استرها به کار روند.**

**پ) نسبت شمار پیوندهای C – H به C – O در آن، برابر ۱۱ است.**

**ت) برای سنتز ۳ مول از آن، باید ۳۰۶ گرم اسید مصرف شود.**

**ث) برهم‌کنش بین مولکولی غالب در آن، پیوند هیدروژنی است.**

۱) الف ـ ت ۲) ب ـ پ ۳) ب ـ پ ـ ت ۴) الف ـ ت ـ ث

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**نکته** برای تعیین شمار اتم‌های هیدروژن در یک ترکیب آلی می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد:

$$\text{تعداد اتم‌های هیدروژن در ترکیبی با n کربن} = (2n+2) - 2\times(\text{تعداد پیوندهای دوگانه}) + (\text{تعداد حلقه‌ها}) - (4\times\text{تعداد پیوندهای سه‌گانه}) - (1\times\text{تعداد اتم‌های هالوژن}) + (1\times\text{تعداد اتم‌های نیتروژن})$$

**پاسخ تشریحی** عبارت‌های «الف» و «ت» درست‌اند.

بررسی موارد:

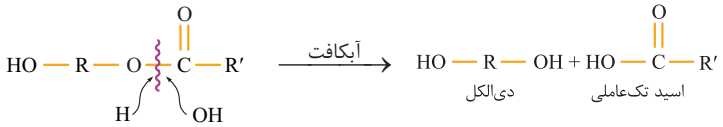
الف) ترکیب مورد نظر، ۲۳ اتم کربن و ۳ اتم اکسیژن دارد. شمار اتم‌های هیدروژن آن را به کمک فرمول، پیدا می‌کنیم:

$$\text{فرمول ترکیب} : C_{23}H_{32}O_3 \Leftarrow \text{شمار H} = \underbrace{(2\times 23)+2}_{\text{آلکان هم‌کربن}} - \underbrace{2(8)}_{\text{مجموع تعداد پیوند دوگانه و حلقه}} = 32$$

جرم مولی ترکیب $= (۲۳\times۱۲)+۳۲+(۳\times۱۶)=۳۵۶\ g.mol^{-۱}$

درصد جرمی H در $C_{۲۳}H_{۳۲}O_۳ = \frac{۳۲}{۳۵۶}\times۱۰۰\simeq٪۹$

ب) گروه عاملی استری ترکیب مورد نظر، می‌تواند آبکافت شود. اگر ساختار ترکیب را به صورت $HO-R-O-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-R'$ نشان دهیم، خواهیم داشت:




از آبکافت ترکیب، یک دی‌الکل به دست می‌آید که می‌تواند در واکنش تولید پلی‌استر به کار رود؛ اما اسید تولیدشده، تک‌عاملی است و به درد *تولید پلی‌استر نمی‌خوره!*

پ) از کل ۳۲ اتم هیدروژن ترکیب، فقط ۱ اتم هیدروژن با اکسیژن در OH پیوند دارد؛ بنابراین در ساختار ترکیب، ۳۱ پیوند C — H وجود دارد. از طرفی ترکیب مورد نظر، ۳ پیوند C — O دارد:

$$\frac{\text{شمار پیوندهای C — H}}{\text{شمار پیوندهای C — O}}=\frac{۳۱}{۳}\neq۱۱$$

ت) با توجه به قسمت «ب»، اسید سازندهٔ ترکیب مورد نظر، $HO-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-CH_۲-CH_۲-CH_۲-CH_۳$ یا $C_۵H_{۱۰}O_۲$ است.

$$۳\,mol\ \text{استر}\times\frac{۱\,mol\,C_۵H_{۱۰}O_۲}{۱\,mol\ \text{استر}}\times\frac{۱۰۲\,g\,C_۵H_{۱۰}O_۲}{۱\,mol\,C_۵H_{۱۰}O_۲}=۳۰۶\,g\,C_۵H_{۱۰}O_۲$$

ث) ترکیب مورد نظر تنها یک گروه OH دارد و نمی‌توان نیروی بین مولکولی غالب آن را پیوند هیدروژنی در نظر گرفت. نیروی بین مولکولی غالب در این ترکیب، از نوع وان‌دروالسی است.

## تست و پاسخ ۹۳

**۶، ۱ ـ هگزان دی‌آمین دارای ساختار $H_۲N\sim\sim NH_۲$ است. فرمول پلیمر به‌دست‌آمده از واکنش آن با ترفتالیک اسید در شرایط مناسب، کدام است؟**

۱) $\{C_{۱۴}H_{۱۸}N_۲O_۲\}_n$

۲) $\{C_{۱۴}H_{۱۶}N_۲O_۲\}_n$

۳) $\{C_{۱۴}H_{۱۶}N_۲O_۴\}_n$

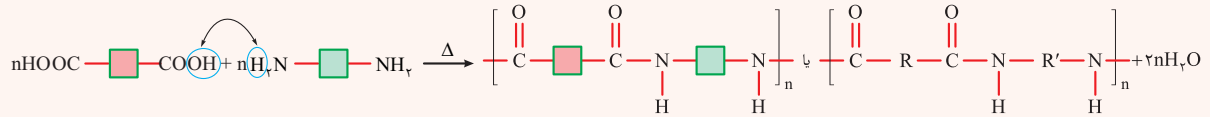
۴) $\{C_{۱۴}H_{۱۸}N_۲O_۴\}_n$

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**درس‌نامه ●● واکنش تهیهٔ پلی‌آمید از دی‌آمین و دی‌اسید**

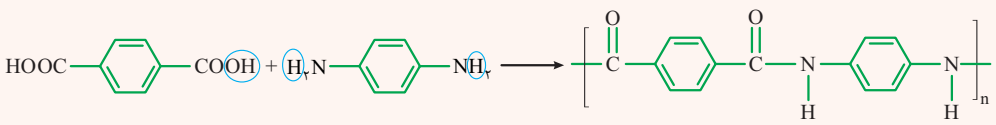
پلی‌آمیدها را می‌توان از واکنش دو نوع مونومر متفاوت شامل کربوکسیلیک اسید دوعاملی (دی‌اسید) و آمین دوعاملی (دی‌آمین) تولید کرد.

در واکنش تولید پلی‌آمید، گروه عاملی $R-\underset{H}{N}-H$ یا $R-\underset{R'}{N}-H$ با عامل اسیدی ($-COOH$) واکنش می‌دهد.

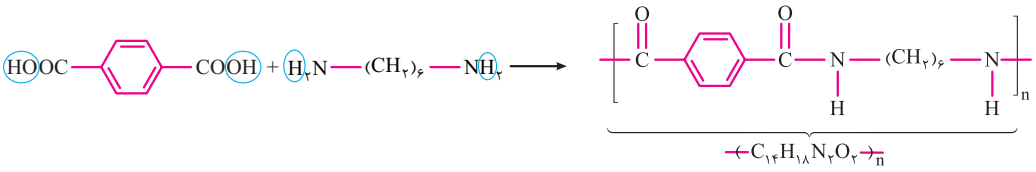


برای رسم ساختار پلی‌آمید حاصل از واکنش یک دی‌اسید و یک دی‌آمین، کافی است یکی از اتم‌های H موجود در گروه عاملی آمینی ($-NH_۲$) و OH موجود در گروه عاملی اسیدی ($-COOH$) را حذف کرده، سپس قسمت‌های باقی‌مانده را به هم متصل کنیم.

مثال:



**پاسخ تشریحی** ترفتالیک اسید یک دی‌اسید با ساختار است؛ بنابراین، خواهیم داشت:



## تست و پاسخ ۹۴

**بر پایهٔ واکنش موازنه‌نشدهٔ $Cu_2S(s)+HCl(aq)\rightarrow CuCl(aq)+H_2S(g)$، اگر ۶/۴ گرم سنگ معدن مس ناخالص با اسید کافی واکنش دهد و ۶۷۲ میلی‌لیتر گاز در شرایط STP آزاد شود، درصد خلوص فلز مس در سنگ معدن چه‌قدر است و چند لیتر محلول اسید با $pH=1/2$ در این فرایند مصرف می‌شود؟ $(\log 2=0/3,\log 3=0/5:g.mol^{-1},Cu=64,S=32)$**

۱) ۶۰٪ ـ ۵ ۲) ۶۰٪ ـ ۱ ۳) ۷۵٪ ـ ۵ ۴) ۷۵٪ ـ ۱

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** معادلهٔ واکنش را موازنه می‌کنیم:

$$Cu_2S+2HCl\rightarrow 2CuCl+H_2S$$

**گام دوم:** با توجه به حجم گاز تولیدشده، درصد خلوص مس و حجم اسید مصرف‌شده را حساب می‌کنیم.

$$Cu_2S\sim 2Cu\overset{\text{اسید قوی}}{\sim} 2HCl\sim H_2S$$

$$\underbrace{\frac{\frac{\text{درصد خلوص}}{100}\times\text{جرم ناخالص}}{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}}_{Cu}=\underbrace{\frac{\text{حجم}\times\text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}}}_{HCl}=\underbrace{\frac{\text{حجم}}{\text{حجم مولی}\times\text{ضریب}}}_{H_2S}$$

در محلول اسید قوی HCl، غلظت مولی محلول، با غلظت $H^+$ $(10^{-pH})$ برابر است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{6/4\times\frac{x}{100}}{2\times 64}=\frac{10^{-1/2}\times y}{2}=\frac{672}{22400}\Rightarrow x=20\times 3=60\%$$

$$y=\frac{2\times 3}{10^{-1/2}\times 10^{2}}=\frac{2\times 3}{10^{0/8}}=\frac{6}{10^{0/3}\times 10^{0/5}}=\frac{6}{2\times 3}=1L$$

**دام تستی** اگر به جای درصد خلوص مس، درصد خلوص $Cu_2S$ را حساب می‌کردین، به عدد ۷۵٪ می‌رسیدین:

$$\frac{6/4\times\frac{x}{100}}{1\times 160}=\frac{672}{22400}\Rightarrow x=75\%$$

## تست و پاسخ ۹۵

**چند مورد، جملهٔ «با افزایش طول زنجیر کربنی در کربوکسیلیک اسیدهای یک‌عاملی، ..... کاهش می‌یابد.» را به درستی کامل می‌کند؟**

- **نقطهٔ جوش آن‌ها**
- **انحلال‌پذیری آن‌ها در آب**
- **pH محلول ۱ مولار آن‌ها**
- **چربی‌گریزی آن‌ها**
- **نسبت شمار پیوندهای C — H به شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**پاسخ تشریحی** ۲ مورد «انحلال‌پذیری در آب و چربی‌گریزی»، جملهٔ داده‌شده را به درستی کامل می‌کنند.

بررسی موارد:

- با افزایش طول زنجیر کربنی و در نتیجه افزایش جرم مولی کربوکسیلیک اسیدها $(RCOOH)$، نقطهٔ جوش آن‌ها افزایش می‌یابد.
- با افزایش طول زنجیر کربنی، بخش ناقطبی مولکول بزرگ‌تر شده و انحلال‌پذیری ترکیب در آب کاهش می‌یابد.

**نکته** با افزایش تعداد کربن‌ها در کربوکسیلیک اسیدهای یک‌عاملی، قدرت اسیدی $(K_a)$ آن کاهش می‌یابد.

- با افزایش طول زنجیر کربنی، قدرت اسیدی کربوکسیلیک اسیدها کاهش یافته و در نتیجه در غلظت یکسان، غلظت یون هیدرونیوم در محلول آن‌ها کم‌تر بوده و در نتیجه pH محلول بیشتر خواهد بود:

$$\text{pH}: \underset{\text{اسید قوی‌تر}}{HCOOH} < \underset{\text{اسیدضعیف‌تر}}{CH_3COOH} \quad \text{محلول ۱مولار}$$

- با افزایش طول زنجیر کربنی و بزرگ‌ترشدن بخش ناقطبی، آب‌گریزی مولکول و چربی‌دوستی آن افزایش می‌یابد؛ یعنی چربی‌گریزی آن کاهش خواهد یافت.
- با افزایش طول زنجیر کربنی و بیشترشدن تعداد اتم‌های کربن و هیدروژن، شمار پیوندهای $C-H$ مولکول افزایش می‌یابد؛ اما همهٔ اسیدهای آلی یک‌عاملی $(RCOOH)$، به دلیل داشتن ۲ اتم اکسیژن، ۴ جفت‌الکترون ناپیوندی دارند؛ پس نسبت گفته‌شده، افزایش می‌یابد:

$$\frac{\text{شمار پیوندهای } C-H \uparrow}{\text{شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی (ثابت)}} \Rightarrow \uparrow$$

## تست و پاسخ ۹۶

**یک شرکت داروسازی، شربت شیر منیزی را با غلظت ۸ درصد جرمی منیزیم هیدروکسید $(d = 1/16\,g.mL^{-1})$ در قوطی‌هایی با میانگین حجم ۱۱۰ میلی‌لیتر تولید و روانهٔ بازار می‌کند. منیزیم مورد استفاده در تهیهٔ ۴۰ هزار قوطی از این دارو را از چند متر مکعب آب دریا $(d = 1/1\,g.mL^{-1})$ که غلظت یون منیزیم در آن برابر ۱۰۲۴ ppm است، می‌توان به دست آورد؟ $(H=1, O=16, Mg=24 : g.mol^{-1})$**

۱) ۱۳۵ ۲) ۱۵۰ ۳) ۱۶۵ ۴) ۱۸۰۰

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا جرم منیزیم به‌کاررفته در ۴۰ هزار قوطی شربت را حساب می‌کنیم:

**نکته** اگر درصد جرمی یک محلول، a و چگالی محلول برحسب $g.mL^{-1}$ برابر d باشد، غلظت مولی محلول را می‌توان از رابطهٔ زیر به دست آورد:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{10ad}{\text{جرم مولی}}$$

$$\text{غلظت مولی } Mg(OH)_2 = \frac{10ad}{\text{جرم مولی}} = \frac{10 \times 8 \times 1/16}{58} = 1/6\ mol.L^{-1}$$

$$\text{۴۰,۰۰۰ قوطی} \times \frac{110\,mL}{1\ \text{قوطی}} \times \frac{1\,L}{1000\,mL} \times \frac{1/6\,mol\,Mg(OH)_2}{1\,L} \times \frac{1\,mol\,Mg^{2+}}{1\,mol\,Mg(OH)_2} \times \frac{24\,g\,Mg^{2+}}{1\,mol\,Mg^{2+}} = 4 \times 110 \times 16 \times 24\,g\,Mg^{2+}$$

**گام دوم:** با استفاده از غلظت $Mg^{2+}$ در آب دریا برحسب ppm، حجم آب دریا را حساب می‌کنیم:

$$ppm = \frac{\text{جرم } Mg^{2+}}{\text{جرم آب دریا}} \times 10^6 \Rightarrow 1024 = \frac{4 \times 110 \times 16 \times 24}{\text{جرم آب دریا}} \times 10^6$$

$$\Rightarrow \text{جرم آب دریا} = \frac{110 \times 24 \times 10^6}{16}\,g \xrightarrow{d=1/1\,g.mL^{-1}} \text{حجم آب دریا} = \frac{110 \times 3 \times 10^6}{2}\,g \times \frac{1\,mL}{1/1\,g} \times \frac{1\,m^3}{10^6\,mL} = 150\,m^3$$

## تست و پاسخ ۹۷

**همهٔ عبارت‌های زیر درست هستند، به‌جز:**

۱) گل ادریسی در خاکی که غلظت یون هیدروکسید در آن $۲/۵\times۱۰^{-۶}$ مولار است، به رنگ سرخ دیده می‌شود.

۲) فراورده‌های واکنش جوهر نمک با جوش شیرین، دارای سه حالت فیزیکی متفاوت هستند.

۳) رسانایی الکتریکی محلول فورمیک اسید به طور آشکاری از رسانایی الکتریکی محلول پتاس سوزآور کم‌تر است.

۴) فرمول شیمیایی $C_{۱۸}H_{۳۳}O_۲Na$ را می‌توان به صابون جامدی نسبت داد که زنجیر هیدروکربنی آن دارای ۱۷ اتم کربن و یک پیوند دوگانه است.

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**پاسخ تشریحی**

بررسی گزینه‌ها:

۱ گل ادریسی در خاک‌های اسیدی ($[H^+]>۱۰^{-۷}$ یا $[OH^-]<۱۰^{-۷}$) به رنگ آبی و در خاک‌های بازی ($[H^+]<۱۰^{-۷}$ یا $[OH^-]>۱۰^{-۷}$) به رنگ سرخ درمی‌آید.

۲ معادلهٔ واکنش جوش شیرین با جوهرنمک به صورت زیر است:

$$NaHCO_۳(aq)+HCl(aq)\rightarrow \underbrace{NaCl(aq)+CO_۲(g)+H_۲O(l)}_{\text{سه حالت فیزیکی متفاوت}}$$

۳ *درسته که* فورمیک اسید $(HCOOH)$ یک اسید ضعیف و پتاس سوزآور $(KOH)$ یک باز قوی است، اما بدون داشتن غلظت محلول‌های آن‌ها نمی‌توان رسانایی الکتریکی آن‌ها را با هم مقایسه کرد.

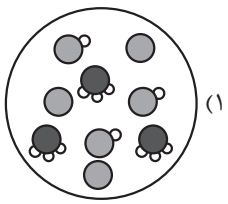
۴ فرمول کلی صابون‌های جامد به صورت $RCOONa$ است. اگر $R$، گروه آلکیل باشد و پیوند دوگانه نداشته باشد، فرمول آن به صورت $C_nH_{۲n+۱}$ خواهد بود. به ازای هر پیوند دوگانه، دو اتم هیدروژن از هیدروژن‌ها کم می‌شود؛ پس اگر گروه $R$ یک زنجیر هیدروکربنی ۱۷کربنه با یک پیوند دوگانه باشد، خواهیم داشت:

$$RCOONa: C_{۱۷}H_{۳۵-۲}COONa = C_{۱۸}H_{۳۳}O_۲Na$$

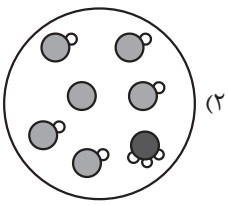
## تست و پاسخ ۹۸

**اگر مقدار ثابت یونش اسید HA برابر ۰/۵ باشد، کدام شکل می‌تواند نشان‌دهندهٔ نمای ذره‌ای محلول ۱ مولار آن باشد؟ (مولکول‌های آب نشان داده نشده‌اند.)**

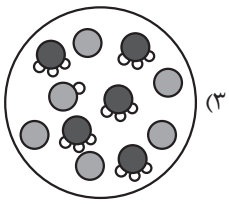
۱)



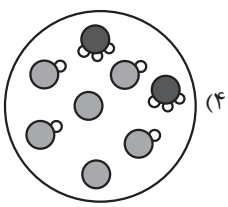
۲)



۳)



۴)



**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**خودت حل کنی بهتره** با استفاده از غلظت محلول و $K_a$ اسید، $\alpha$ را حساب کن! بعد ببین در کدام شکل، $\alpha$ با مقدار محاسبه‌شده تطابق داره.

**پاسخ تشریحی** **گام اول:** درجهٔ یونش ($\alpha$) اسید در محلول ۱ مولار را حساب می‌کنیم:

$$K_a = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow 0/5 = \frac{\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow 2\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

**گام دوم:** درجهٔ یونش اسید در محلول‌های داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\alpha = \frac{\text{تعداد مولکول یونیده‌شده}}{\text{تعداد کل مولکول‌های حل‌شده}} = \frac{\text{تعداد } H_3O^+}{\text{تعداد } H_3O^+ + \text{تعداد مولکول اسید باقی‌مانده}}$$

۱) $\alpha_1 = \frac{3}{3+3} = \frac{1}{2}$

۲) $\alpha_2 = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6}$

۳) $\alpha_3 = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}$

۴) $\alpha_4 = \frac{2}{4+2} = \frac{1}{3}$

## تست و پاسخ ۹۹

**اگر واکنش (الف) را برخلاف واکنش های (ب) و (پ)، بتوان در یک سلول گالوانی انجام داد، کدام مطلب نادرست است؟**

**الف)** $U + Cd^{2+} \rightarrow U^{3+} + Cd$

**ب)** $Cd + Cr^{3+} \rightarrow Cd^{2+} + Cr^{2+}$

**پ)** $Cr^{2+} + U^{3+} \rightarrow Cr^{3+} + U$

۱) مقایسهٔ قدرت اکسندگی گونه‌ها به صورت: $U^{3+} < Cr^{3+} < Cd^{2+}$ است.

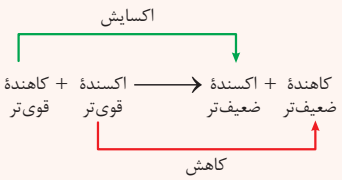
۲) در سلول گالوانی اورانیم ـ کادمیم، الکترود کادمیم کاتد است.

۳) موقعیت نیم‌واکنش $Cr^{3+}(aq) + e^- \rightarrow Cr^{2+}(aq)$ در جدول سری الکتروشیمیایی، پایین‌تر از موقعیت نیم‌واکنش $Cd^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Cd(s)$ است.

۴) تمایل $Cr^{2+}$ برای اکسیدشدن به $Cr^{3+}$، بیشتر از تمایل U برای اکسیدشدن به $U^{3+}$ است.

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**درس‌نامه** در واکنش‌های اکسایش ـ کاهش که به طور طبیعی انجام می‌شوند، کاهندهٔ قوی‌تر و اکسندهٔ قوی‌تر با هم واکنش می‌دهند و اکسندهٔ ضعیف‌تر و کاهندهٔ ضعیف‌تر، تشکیل می‌شوند.




مثال:

$$\underset{\text{کاهندهٔ قوی‌تر}}{Zn} + \underset{\text{اکسندهٔ قوی‌تر}}{Cu^{2+}} \rightarrow \underset{\text{اکسندهٔ ضعیف‌تر}}{Zn^{2+}} + \underset{\text{کاهندهٔ ضعیف‌تر}}{Cu} \Rightarrow \begin{matrix} \text{قدرت کاهندگی: } Zn > Cu \\ \text{قدرت اکسندگی: } Cu^{2+} > Zn^{2+} \end{matrix}$$

**توجه** مقایسهٔ قدرت اکسندگی کاتیون‌های دو فلز، برعکس مقایسهٔ قدرت کاهندگی خود فلزها است؛ به عبارت دیگر، هر چه فلزی قدرت کاهندگی بیشتری داشته باشد، کاتیون آن، تمایل کم‌تری برای گرفتن الکترون دارد:

$$\text{قدرت کاهندگی: } Al > Zn > Fe > Cu \Rightarrow \text{قدرت اکسندگی: } Al^{3+} < Zn^{2+} < Fe^{2+} < Cu^{2+}$$

گونه‌هایی که می‌خواهید قدرت اکسندگی و یا کاهندگی آن‌ها را با هم مقایسه کنید، باید در دو سمت معادله باشند نه در یک سمت! به طور مثال در واکنش بالا، گفتن جملهٔ: «قدرت اکسندگی $Cu^{2+}$ از Zn بیشتر است» *غلط!*

مثال:

اکسایش

$$\overset{\text{کاهندهٔ قوی‌تر}}{2Cr^{2+}} + \overset{\text{اکسندهٔ قوی‌تر}}{Sn^{2+}} \rightarrow \overset{\text{اکسندهٔ ضعیف‌تر}}{2Cr^{3+}} + \overset{\text{کاهندهٔ ضعیف‌تر}}{Sn} \Rightarrow \begin{matrix} \text{قدرت کاهندگی}: Cr^{2+} > Sn \\ \text{قدرت اکسندگی}: Sn^{2+} > Cr^{3+} \end{matrix}$$

کاهش

**پاسخ تشریحی** ابتدا ببینیم از هر واکنش، چه نتیجه‌ای می‌گیریم:

الف) $U + Cd^{2+} \xrightarrow{\text{انجام می‌شود}} U^{3+} + Cd$ ← قدرت کاهندگی: $U > Cd$ ؛ قدرت اکسندگی: $Cd^{2+} > U^{3+}$

ب) $Cd + Cr^{3+} \xrightarrow{\text{انجام نمی‌شود}} Cd^{2+} + Cr^{2+}$ ← قدرت کاهندگی: $Cd < Cr^{2+}$ ؛ قدرت اکسندگی: $Cr^{3+} < Cd^{2+}$

پ) $Cr^{2+} + U^{3+} \xrightarrow{\text{انجام نمی‌شود}} Cr^{3+} + U$ ← قدرت کاهندگی: $Cr^{2+} < U$ ؛ قدرت اکسندگی: $U^{3+} < Cr^{3+}$

بررسی گزینه‌ها:

۱) قدرت اکسندگی: الف) $Cd^{2+} > U^{3+}$ ، ب) $Cd^{2+} > Cr^{3+}$ ، پ) $Cr^{3+} > U^{3+}$ $\Rightarrow Cd^{2+} > Cr^{3+} > U^{3+}$

۲) با توجه به واکنش (الف)، قدرت کاهندگی اورانیم (U) از کادمیم (Cd) بیشتر است؛ بنابراین، در سلول گالوانی (اورانیم ـ کادمیم)، اورانیم آند و کادمیم، کاتد است.

۳) با توجه به واکنش (ب) که به طور طبیعی انجام نمی‌شود، می‌توان نتیجه گرفت که نیم‌سلول $Cr^{3+} / Cr^{2+}$ در سری الکتروشیمیایی، پایین‌تر از نیم‌سلول $Cd^{2+} / Cd$ است. در واقع، وارونهٔ واکنش (ب) به طور طبیعی انجام می‌شود و قدرت کاهندگی $Cr^{2+}$ از Cd بیشتر است و در سری الکتروشیمیایی، گونه‌هایی با قدرت کاهندگی بیشتر، در موقعیت پایین‌تری قرار دارند.

۴) با توجه به واکنش (پ) که وارونهٔ آن به طور طبیعی انجام می‌شود، می‌توان گفت که قدرت کاهندگی U از $Cr^{2+}$ بیشتر است و به عبارت دیگر تمایل اکسایش U به $U^{3+}$، بیشتر از تمایل اکسایش $Cr^{2+}$ به $Cr^{3+}$ است.

## تست و پاسخ ۱۰۰

**اگر در فرایند هال، $3/612\times10^{26}$ الکترون مبادله شود، برای جذب کربن دی‌اکسید تولیدشده طی این فرایند، به چند کیلوگرم آهک نیاز است؟ $(O = 16 , Ca = 40 : g.mol^{-1})$**

۱) ۴/۸ ۲) ۵/۶ ۳) ۶/۵ ۴) ۸/۴

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**پاسخ تشریحی** در فرایند هال به ازای تولید ۳ مول کربن دی‌اکسید، ۱۲ مول الکترون مبادله می‌شود:

$$2Al_2O_3 + \overset{0}{3C} \longrightarrow 4Al + 3\overset{+4}{CO_2} \quad (3\times4 = 12)$$

هر مول $CO_2$ با ۱ مول آهک (CaO) به طور کامل واکنش می‌دهد: $CO_2 + CaO \rightarrow CaCO_3$

$$3/612\times10^{26}\,e^- \times \frac{1\,mol\,e^-}{6/02\times10^{23}\,e^-} \times \frac{3\,mol\,CO_2}{12\,mol\,e^-} \times \frac{1\,mol\,CaO}{1\,mol\,CO_2} \times \frac{56\,g\,CaO}{1\,mol\,CaO} \times \frac{1\,kg\,CaO}{1000\,g\,CaO}$$

$$= \frac{36/12\times10^{25} \times 3\times56}{6/02\times10^{23}\times12\times1000} = \frac{6\times56}{4\times10} = 8/4\,kg\,CaO$$

## تست و پاسخ ۱۰۱

**چند مورد از مطالب زیر درست است؟**

- **شمار مول الکترون‌های مبادله‌شده در واکنش: $MnO_4^-(aq)+H_2O_2(aq)+H^+(aq)\rightarrow Mn^{2+}(aq)+O_2(g)+H_2O(l)$ پس از موازنه، به ازای مصرف هر مول اکسنده، برابر ۵ است.**
- **نیم‌واکنش کاتدی در زنگ‌زدن حلبی، به صورت: $O_2(g)+2H_2O(l)+4e^-\rightarrow 4OH^-(aq)$ است.**
- **در سری الکتروشیمیایی، یون لیتیم اکسنده‌ترین کاتیون و یون فلوئورید، ضعیف‌ترین اکسنده است.**
- **در سلول سوختی هیدروژن ـ اکسیژن، جهت حرکت الکترون‌ها همسو با جهت حرکت یون‌های هیدرونیوم از غشای مبادله‌کننده است.**

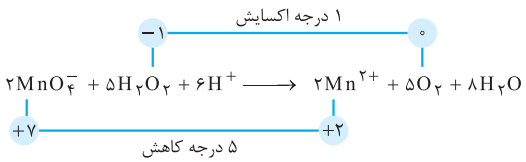
۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

**پاسخ: گزینهٔ ۲**

**پاسخ تشریحی** عبارت‌های اول، دوم و چهارم درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- ابتدا معادلهٔ واکنش را موازنه می‌کنیم.

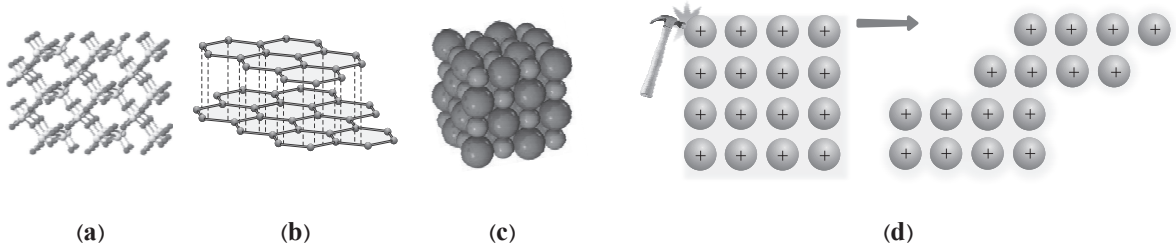



به ازای ۲ مول اکسنده $(MnO_4^-)$، ۱۰ مول الکترون مبادله می‌شود؛ بنابراین به ازای هر مول از آن، ۵ مول الکترون مبادله خواهد شد. ✓

- نیم‌واکنش کاتدی در زنگ‌زدن آهن، آهن گالوانیزه و حلبی، همگی مربوط به کاهش مولکول‌های اکسیژن بوده و به صورت $O_2(g)+2H_2O(l)+4e^-\rightarrow 4OH^-(aq)$ است. ✓
- در سری الکتروشیمیایی، لیتیم $(Li)$ قوی‌ترین کاهنده و یون فلوئورید $(F^-)$ ضعیف‌ترین کاهنده است؛ بنابراین، یون لیتیم $(Li^+)$ ضعیف‌ترین اکسنده و گاز فلوئور $(F_2)$، قوی‌ترین اکسنده است. ✗
- در سلول سوختی هیدروژن همانند سایر سلول‌های گالوانی، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار بیرونی، از آند به کاتد است. هم‌چنین، در سلول‌های گالوانی، کاتیون‌ها به سمت کاتد می‌روند. در سلول سوختی نیز یون‌های هیدرونیوم $(H^+)$ از طریق غشای مبادله‌کننده به سمت کاتد حرکت می‌کند. ✓

## تست و پاسخ ۱۰۲

**کدام دسته از مواد، نمایندهٔ مناسبی برای ساختار یا ویژگی عمومی جامد بلوری ارائه‌شده است؟**




۱) آلیاژ نیتینول: d و گرافن: b و سیلیسیم: a
۲) سیلیسیم کربید: c و گرافیت: b و کوارتز: a
۳) قوطی آلومینیمی: d و کلسیم اکسید: c و گرافیت: b
۴) ساچمهٔ سربی: d و نیتروژن مونوکسید: c و سیلیس: a

**پاسخ: گزینهٔ ۳**

**درس‌نامه** مقایسهٔ کلی انواع جامدهای بلوری

| نوع جامد / خواص | جامد مولکولی | جامد کووالانسی | جامد یونی | جامد فلزی |
|---|---|---|---|---|
| ذره‌های سازندهٔ بلور | مولکول‌های مجزا | اتم‌ها | کاتیون‌ها و آنیون‌ها | کاتیون‌ها و دریای الکترونی |
| سختی | معمولاً نرم | بسیار سخت (به‌جز گرافیت) | سخت و شکننده | برخی نرم ولی اغلب سخت |
| رسانایی الکتریکی در حالت جامد | نارسانا | برخی نارسانا (مانند الماس) و بعضی رسانا (مانند گرافیت) | نارسانا | رسانا |
| رسانایی الکتریکی در حالت مذاب (مایع) | نارسانا | نارسانا | رسانا | رسانا |
| دمای ذوب نسبی | پایین | خیلی بالا | بالا | اغلب متوسط یا بالا |
| مثال | $H_2O$ (یخ)، $I_2$، $CO_2$ (یخ خشک)، گوگرد و نفتالن ($C_{10}H_8$) | $Si$، $SiO_2$ (سیلیس)، $SiC$ (سیلیسیم کربید)، گرافیت و الماس | $NaCl$، $Al_2O_3$، $MgO$ و $NH_4Cl$ | $Au$، $Fe$ و $Na$ |

**پاسخ تشریحی**

a) می‌تواند نشان‌دهندهٔ جامدهای کووالانسی مانند سیلیسیم، کوارتز یا سیلیس باشد.

b) ساختار لایه‌ای دارد و می‌تواند گرافیت باشد.

c) می‌تواند یک ترکیب یونی مانند کلسیم اکسید یا منیزیم برمید باشد.

d) یک جامد چکش‌خوار است و می‌تواند یک فلز مانند آلومینیم، سرب یا آلیاژ فلزی باشد.

## تست و پاسخ ۱۰۳

**کدام مطلب به یقین درست است؟**

۱) مولکول‌هایی که اتم مرکزی آن‌ها فاقد الکترون ناپیوندی است، در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کنند.

۲) عنصری از دورهٔ سوم که شعاع اتمی بزرگ‌تری دارد، شعاع یون پایدار آن نیز نسبت به سایر یون‌های پایدار این دوره بزرگ‌تر است.

۳) همهٔ مولکول‌هایی که از اتم‌های یکسانی تشکیل شده‌اند، ناقطبی‌اند.

۴) آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور هالیدهای فلزهای قلیایی، با کاهش واکنش‌پذیری فلز، افزایش می‌یابد.

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**پاسخ تشریحی** بررسی گزینه‌ها:

۱) اگر اتم‌های متصل به اتم مرکزی در یک مولکول متفاوت باشند، مولکول قطبی بوده و در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند. مانند $SCO$ یا $CH_2O$!

۲) در دورهٔ سوم، بیشترین شعاع اتمی مربوط به اولین عنصر دوره یعنی $_{11}Na$ است؛ اما بیشترین شعاع یونی در این دوره، مربوط به $_{15}P^{3-}$ می‌باشد.

۳) اوزون ($O_3$) با این‌که از اتم‌های یکسانی تشکیل شده است، اما مولکولی قطبی به حساب می‌آید.

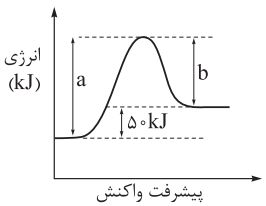
۴) آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیب‌های یونی با بار یون‌ها رابطهٔ مستقیم و با شعاع آن‌ها رابطهٔ وارونه دارد. در فلزهایی قلیایی با کاهش واکنش‌پذیری فلز (یعنی از پایین به بالا)، شعاع یون پایدارشان کاهش یافته و آنتالپی فروپاشی آن‌ها افزایش می‌یابد:

آنتالپی فروپاشی : $LiF > NaF > KF$

کاهش واکنش‌پذیری فلز

## تست و پاسخ ۱۰۴

**نمودار انرژی ـ پیشرفت یک واکنش گازی در غیاب کاتالیزگر به صورت زیر است. اگر در حضور کاتالیزگر، مقدار a، ۳۰ درصد کاهش یابد و مقدار b به ۶۲/۵ درصد مقدار اولیهٔ خود برسد، کدام مطلب نادرست است؟**




۱) مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده، از مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده بیشتر است.

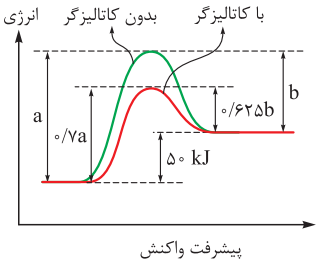
۲) در غیاب کاتالیزگر، نسبت انرژی فعال‌سازی واکنش (در جهت رفت) به $\Delta H$ واکنش، برابر ۵ است.

۳) انرژی فعال‌سازی واکنش در حضور کاتالیزگر، ۷۵kJ کاهش یافته است.

۴) اگر a و b در حضور کاتالیزگر به $a'$ و $b'$ تبدیل شوند، نسبت $a'$ به $b'$ برابر ۱/۲۵ است.

**پاسخ: گزینهٔ ۴**

**پاسخ تشریحی** با توجه به اطلاعات داده‌شده، مقدار a در حضور کاتالیزگر به ۰/۷a و مقدار b به ۰/۶۲۵b می‌رسد.




بررسی گزینه‌ها:

۱) واکنش گرماگیر است و در واکنش‌های گرماگیر، مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده، بیشتر است:

$$\Delta H(\text{واکنش}) = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}]$$

$$\Delta H > 0 \Rightarrow \text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده} > \text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}$$

۲) می‌دانیم کاتالیزگر، $\Delta H$ واکنش را تغییر نمی‌دهد، بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a-b=50 \\ 0/7a-0/625b=50 \end{cases} \Rightarrow a-b=0/7a-0/625b \Rightarrow 0/3a=\underbrace{0/375b}_{\frac{3}{8}} \Rightarrow b=0/8a$$

$$a-b=50 \Rightarrow a-0/8a=50 \Rightarrow 0/2a=50 \Rightarrow a=250$$

$$\frac{E_a}{\Delta H}=\frac{250}{50}=5$$

۳) مقدار انرژی فعال‌سازی واکنش از a به ۰/۷a رسیده است:

$$\text{میزان کاهش } E_a = 0/3a = 0/3\times 250 = 75\,kJ$$

۴) نسبت $a'$ به $b'$ برابر است با:

$$\frac{a'}{b'}=\frac{0/7a}{0/625b}=\frac{0/7\,a}{0/625\times 0/8\,a}=\frac{7}{\frac{5}{8}\times 8}=\frac{7}{5}=1/4$$

## تست و پاسخ ۱۰۵

**کدام موارد از مطالب زیر، نادرست‌اند؟**

**الف) اگر در واکنش تعادلی: $2NO(g)+O_2(g) \rightleftharpoons 2NO_2(g)$، غلظت همهٔ مواد موجود در تعادل را دو برابر کنیم، مقدار ثابت تعادل دو برابر می‌شود.**

**ب) واکنش حذف NO(g) در مبدل‌های کاتالیستی خودروهای بنزینی، گرماده و از نوع اکسایش ـ کاهش است.**

**پ) برای تبدیل پارازایلن به ترفتالیک اسید در صنعت، از کاتالیزگر اکسیژن استفاده می‌شود.**

**ت) نقش جرقه در افزایش سرعت واکنش هیدروژن با اکسیژن، کاهش انرژی فعال‌سازی است.**

۱) الف ـ پ ـ ت ۲) الف ـ ب ۳) پ ـ ت ۴) الف ـ ب ـ ت

**پاسخ: گزینهٔ ۱**

**پاسخ تشریحی** عبارت‌های «الف»، «پ» و «ت» نادرست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) ثابت تعادل فقط به دما بستگی دارد و با تغییر غلظت مواد، تغییری نمی‌کند.

ب) واکنش $2NO(g) \rightarrow N_2(g) + O_2(g)$، گرماده و از نوع اکسایش ـ کاهش است.

پ) برای تبدیل پارازایلن به ترفتالیک اسید، می‌توان از اکسیژن هوا به عنوان واکنش‌دهنده و کاتالیزگرهای مناسب استفاده کرد.

ت) جرقه انرژی فعال‌سازی واکنش را تأمین می‌کند، کاهش نمی‌دهد!