سروش اندیشه
مؤسسه فرهنگی هنری

کد آزمون ۱۱۶۷

شماره داوطلب
نام خانوادگی و نام
- - -
خراسان رضوی
شهر

0513845369O

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی
موسسه سروش اندیشه حیات

دفترچه شماره ۱

پاسخنامه آزمون جمع بندی مباحث دهم

گروه آزمایشی علوم ریاضی

نام و نام خانوادگی: شماره داوطلبی:

تعداد سوال: ۱۰۵عدد مدت پاسخگویی: ۱۴۵دقیقه

عنوان مواد امتحانی تعداد،شماره سوالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سوال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰ دقیقه
۲	فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه
۳	شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه

برای مشاهده پاسخنامه آزمون به کانال تلگرام موسسه مراجعه نمایید

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

$$\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b} \Rightarrow \frac{ax-a^۲+bx-b^۲}{ab}=\frac{ax-a^۲+bx-b^۲}{x^۲-(a+b)x+ab}$$

به تساوی کسری رسیدیم که صورت‌های آن‌ها با هم برابرند پس دو حالت داریم:

یا صورت‌ها صفراند:

$$ax-a^۲+bx-b^۲=۰ \Rightarrow ax+bx=a^۲+b^۲ \Rightarrow x(a+b)=a^۲+b^۲ \Rightarrow \boxed{x=\frac{a^۲+b^۲}{a+b}}$$

یا مخرج کسرها با هم برابرند:

$$x^۲-(a+b)x+ab=ab \Rightarrow x^۲-(a+b)x=۰ \Rightarrow x(x-(a+b))=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=۰} \\ x-(a+b)=۰ \rightarrow \boxed{x=a+b} \end{cases}$$

پس سه جواب داریم

۲ - گزینه ۴ توان‌های x همگی زوج‌اند پس حاصل $۳x^{۱۰}+۲x^۴+۳x^۲$ همواره بزرگتر یا مساوی صفر است.

پس حاصل $۲+۳x^{۱۰}+۲x^۴+۳x^۲$ به ازای تمام مقادیر x همواره بزرگتر یا مساوی ۲ است.

بنابراین به ازای هیچ مقداری از x معادله‌ی $۳x^{۱۰}+۲x^۴+۳x^۲+۲=۰$ برقرار نیست.

۳ - گزینه ۱

$$x^۲+bx+c=۰ \xrightarrow{b=c+۱} x^۲+(c+۱)x+c=۰ \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x+۱)(x+c)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \\ x+c=۰ \Rightarrow x=-c \end{cases}$$

۴ - گزینه ۲ باتوجه به شکل، دو نقطهٔ $(۲,۰)$, $(۰,۰)$ روی سهمی قرار دارند:

$$y=ax^۲+bx+c \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{(۰,۰)} ۰=۰+۰+c \Rightarrow \boxed{c=۰} \\ \xrightarrow{(۲,۰)} ۰=۴a+۲b+c \xrightarrow{c=۰} ۴a=-۲b \Rightarrow ۲a=-b \end{cases}$$

۵ - گزینه ۱

معادلهٔ درجهٔ ۲ ریشهٔ مضاعف دارد، هرگاه $\Delta=۰$ باشد.

$$\Delta=۰ \rightarrow b^۲-۴ac=۰ \rightarrow (m+۲)^۲-۴(۲m+۱)\times ۱=۰$$

$$\Rightarrow m^۲+۴m+۴-۸m-۴=۰ \Rightarrow m(m-۴)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=۰ \Rightarrow x^۲+۲x+۱=۰ \Rightarrow (x+۱)^۲=۰ \Rightarrow x=-۱ \\ m=۴ \Rightarrow ۹x^۲+۶x+۱=۰ \Rightarrow (۳x+۱)^۲=۰ \Rightarrow ۳x+۱=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

۶ - گزینه ۲

$$x^۴y^۴-۱۰x^۲y^۲+۹=۰ \xrightarrow{x^۲y^۲=t} t^۲-۱۰t+۹=۰ \Rightarrow (t-۱)(t-۹)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t-۱=۰ \Rightarrow t=۱ \\ t-۹=۰ \Rightarrow t=۹ \end{cases}$$

$$x^۲y^۲=t \Rightarrow \begin{cases} t=۱ \Rightarrow x^۲y^۲=۱ \xrightarrow{x,y\in\mathbb{N}} xy=۱ \Rightarrow (x,y)=(۱,۱) \\ t=۹ \Rightarrow x^۲y^۲=۹ \xrightarrow{x,y\in\mathbb{N}} xy=۳ \Rightarrow \begin{cases} (x,y)=(۱,۳) \\ (x,y)=(۳,۱) \end{cases} \end{cases}$$

۷ - گزینه ۴

در یک معادلهٔ درجهٔ ۲ با ضرایب گویا، ریشه‌ها زمانی گویا هستند که Δ مربع کامل باشد.

$$\Delta=(۲k-۱)^۲-۴k(k-۲)=۴k^۲-۴k+۱-۴k^۲+۸k=۴k+۱$$

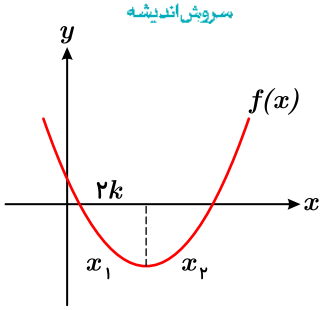
برای آنکه $۴k+۱$ مربع کامل باشد، k عضو مجموعه $\{۲,۶,۱۲,۲۰,\cdots\}$

راهنمایی: با توجه به عبارت $۴k+۱$، گزینه‌ها را آزمایش می‌کنیم تا معلوم شود کدام مجموعه مقادیر مربع کامل را تولید می‌کند.

۸ - گزینه ۴ فرض کنیم $|OA|=k$ باشد، داریم $|AB|=۲k$.

با توجه به شکل $x_1 = k$ پس:

با توجه به معادلهٔ سهمی داریم:



$$\text{طول رأس سهمی} = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-۱۲}{۲} = ۶ \Rightarrow \text{طول رأس} = k + ۲k = ۶ \to k = ۲$$

چون $x_1 = k = ۲$ یکی از صفرهای معادله است، پس باید در معادله صدق کند:

$$f(۲) = ۰ \to ۴ - ۲۴ + m + ۸ = ۰ \Rightarrow m = ۱۲$$

۹ - گزینه ۴ برای اینکه جواب‌های یک معادله گویا باشند باید Δ در مسئله، مربع کامل باشد.

$$\Delta = (۲k-۱)^۲ - ۴k(k-۲) = ۴k^۲ - ۴k + ۱ - ۴k^۲ + ۸k = ۴k + ۱$$

مقادیر $۴k+۱$ به ازای مجموعهٔ $\{۲, ۶, ۱۲, ۲۰, \cdots\}$ مربع کامل می‌شود.

۱۰ - گزینه ۱

$$S_{\text{هاشور}} = S_{\text{کل}} - S_{\text{مثلث}} = ۲۰ \Rightarrow (x+۳)(x+۳) - \frac{۱}{۲} \times x \times (x+۳) = ۲۰$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۶x + ۹ - \frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۳}{۲}x = ۲۰$$

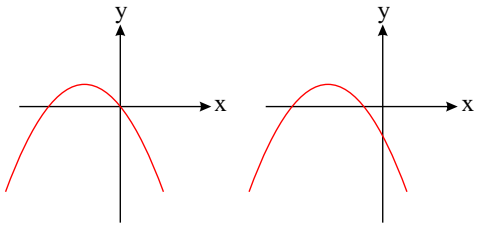
$$\xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲ + ۱۲x + ۱۸ - x^۲ - ۳x = ۴۰ \Rightarrow x^۲ + ۹x + ۱۸ - ۴۰ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۹x - ۲۲ = ۰ \Rightarrow (x+۱۱)(x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱۱ \\ x = ۲ \end{cases}$$

چون x برابر با طول ضلع مثلث است، نمی‌تواند منفی باشد؛ پس $x = ۲$ را می‌پذیریم.

۱۱ - گزینه ۲

نمودار سهمی مورد نظر باید به یکی از دو صورت مقابل باشد:



پس اولاً ضریب $x^۲$ باید منفی باشد:

$$a - ۱ < ۰ \Rightarrow a < ۱ \quad (۱)$$

طول محل برخورد نمودار با محور xها را به‌دست می‌آوریم:

$$y = (a-۱)x^۲ + (۲a-۱)x + a = ۰$$

$$\Delta = (۲a-۱)^۲ - ۴(a-۱)a = ۱$$

$$x = \frac{-(۲a-۱) \pm ۱}{۲(a-۱)} \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = \dfrac{a}{۱-a} \end{cases}$$

طبق نمودار سهمی باید، $\dfrac{a}{a-۱}$ نامثبت باشد پس داریم:

$$\frac{a}{۱-a} \leq ۰ \Rightarrow a \leq ۰ \text{ یا } a > ۱ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} a \leq ۰$$

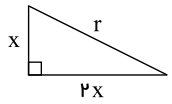
۱۲ - گزینه ۴

کمترین یا بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم همان عرض نقطه‌ی S است.

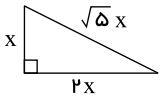
$$\frac{۴ac - b^۲}{۴a} = \frac{-۸ - ۱}{-۴} = \frac{۹}{۴}$$

۱۳ - گزینه ۲

با نوشتن رابطهٔ فیثاغورس در مثلث روبه‌رو داریم:



$$r^۲ = x^۲ + (۲x)^۲ = x^۲ + ۴x^۲ = ۵x^۲ \Rightarrow r = \sqrt{۵}x$$



$$\text{اندازهٔ محیط} = x + ۲x + \sqrt{۵}x = (۳ + \sqrt{۵})x$$

$$\text{اندازهٔ مساحت} = \frac{۲x \times x}{۲} = x^۲$$

با توجه به مجموع اندازه‌های محیط و مساحت، طبق فرض داریم:

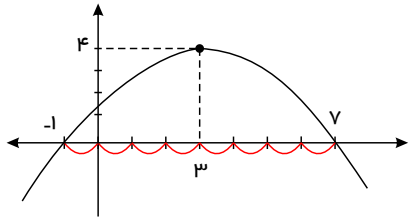
$$x^۲ + (۳ + \sqrt{۵})x = ۱۰ + ۲\sqrt{۵}$$
$$x^۲ + (۳ + \sqrt{۵})x - (۱۰ + ۲\sqrt{۵}) = ۰$$
$$\Delta = (۳ + \sqrt{۵})^۲ + ۴(۱)(۱۰ + ۲\sqrt{۵}) = ۹ + ۶\sqrt{۵} + ۵ + ۴۰ + ۸\sqrt{۵}$$
$$= ۴۹ + ۱۴\sqrt{۵} + ۵ = (۷ + \sqrt{۵})^۲ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = ۷ + \sqrt{۵}$$

$$x_۱, x_۲ = \frac{-۳ - \sqrt{۵} \pm (۷ + \sqrt{۵})}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \dfrac{-۳ - \sqrt{۵} - ۷ - \sqrt{۵}}{۲} = \dfrac{-۱۰ - ۲\sqrt{۵}}{۲} = -۵ - \sqrt{۵} \quad \text{غ.ق.ق} \\ x_۲ = \dfrac{-۳ - \sqrt{۵} + ۷ + \sqrt{۵}}{۲} = \dfrac{۴}{۲} = ۲ \end{cases}$$

۱۴ - گزینه ۱

می‌دانیم: ریشه‌های سهمی (نقاط تلاقی با محور xها) از طول رأس سهمی به یک فاصله‌اند.

با رسم نمودار سهمی داریم:



$$y = ax^۲ + bx + c \Rightarrow \begin{cases} (-۱, ۰) : a - b + c = ۰ & (I) \\ (۷, ۰) : ۴۹a + ۷b + c = ۰ & (II) \\ (۳, ۴) : ۹a + ۳b + c = ۴ & (III) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{I,III} \begin{cases} a - b + c = ۰ \\ ۹a + ۳b + c = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۹a - ۹b + ۹c = ۰ \\ ۹a + ۳b + c = ۴ \end{cases} \Rightarrow -۱۲b + ۸c = -۴ \quad (IV)$$

$$\xrightarrow{I,II} \begin{cases} a - b + c = ۰ \\ ۴۹a + ۷b + c = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴۹a - ۴۹b + ۴۹c = ۰ \\ ۴۹a + ۷b + c = ۴ \end{cases} \Rightarrow -۵۶b + ۴۸c = ۰ \quad (V)$$

$$\xrightarrow{IV,V} \begin{cases} -۱۲b + ۸c = -۴ \\ -۵۶a + ۴۸c = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۳b + ۲c = -۱ \\ -۷a + ۶c = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲۱a + ۱۴c = -۷ \\ -۲۱a + ۱۸c = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۴c = ۷ \Rightarrow c = \frac{۷}{۴}$$

راه‌حل دوم:

طول پاره‌خطی که روی محور xها جدا شده است، ۸ واحد است. چون رأس سهمی وسط پاره‌خط است، پس یک نقطه روی محور xها ۴ واحد جلوتر از ۳ و یک نقطه ۴ واحد عقب‌تر از ۳ است.

$$\begin{cases} x_۱ = ۳ - ۴ = -۱ \\ x_۲ = ۳ + ۴ = ۷ \end{cases} \xrightarrow{\text{معادلهٔ سهمی}} y = a(x + ۱)(x - ۷)$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه } (۳,۴) \text{ در منحنی صدق می‌کند}} a(۳ + ۱)(۳ - ۷) = ۴ \Rightarrow -۱۶a = ۴ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{۱}{۴}(x + ۱)(x - ۷) \xrightarrow{\text{عرض از مبدأ}} -\frac{۱}{۴}(۰ + ۱)(۰ - ۷) = \frac{۷}{۴}$$

۱۵ - گزینه ۲

$$۱-\frac{۴}{x}+\frac{۴}{x^۲}=۰\Rightarrow ۱^۲-۲\times\frac{۲}{x}+(\frac{۲}{x})^۲=۰\Rightarrow(۱-\frac{۲}{x})^۲=۰\Rightarrow ۱-\frac{۲}{x}=۰\Rightarrow\frac{۲}{x}=۱$$

۱۶ - گزینه ۴ نمودار هر سهمی که از دو نقطهٔ $(۱,۰)$ و $(-۳,۰)$ می‌گذرد، به‌صورت ضریبی از $(x-۱)(x+۳)$ می‌باشد، پس:

$$ax^۲+bx+۱=a(x-۱)(x+۳)\Rightarrow ax^۲+bx+۱=a(x^۲+۲x-۳)\Rightarrow -۳a=۱\ ,\ ۲a=b$$

$$\Rightarrow a=\frac{-۱}{۳}\ ,\ b=\frac{-۲}{۳}\Rightarrow y=\frac{-۱}{۳}x^۲-\frac{۲}{۳}x+۱$$

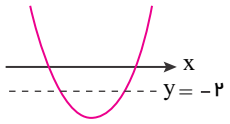
بنابراین با توجه به اینکه ضریب $x^۲$ در سهمی دوم برابر b است، معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y=b(x-۱)(x+۳)\Rightarrow y=\frac{-۲}{۳}(x^۲+۲x-۳)\Rightarrow y=\frac{-۲}{۳}x^۲-\frac{۴}{۳}x+۲$$

$x=-۱$ (میانگین دو ریشه) طول رأس هر دو سهمی است، پس عرض رئوس دو سهمی به‌ترتیب برابر $\frac{۴}{۳}$ و $\frac{۸}{۳}$ است که مجموع آنها برابر ۴ است.

۱۷ - گزینه ۱ چشم‌انداز: معادلهٔ $(x-a)(x-b)+۲=۰$ دو ریشهٔ حقیقی دارد. پس خط $y=-۲$، نمودار $y=(x-a)(x-b)$ را همواره در دو نقطه قطع می‌کند.

پلهٔ یکم: تابع $y=(x-a)(x-b)$ یک تابع درجهٔ ۲ است که مینیمم دارد و محور طول‌ها را در هر نقطه قطع می‌کند. پس نمودار آن و خط $y=-۲$ به‌صورت زیر است.



بنابراین خط $y=-۱$ نیز نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند یعنی معادلهٔ $(x-a)(x-b)+۱=۰$ نیز همواره دو ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۸ - گزینه ۴

$$۲mx^۲+۳x-m=۰$$

دو جواب : همواره مثبت : $\Delta=۹-۴(۲m)(-m)=۹+۸m^۲$

۱۹ - گزینه ۲

$$۲x(۴x-۳)=۱۳\Rightarrow ۸x^۲-۶x-۱۳=۰\Rightarrow x^۲-\frac{۳}{۴}x=\frac{۱۳}{۸}$$

$$x^۲-\frac{۳}{۴}x+\frac{۹}{۶۴}=\frac{۱۳}{۸}+\frac{۹}{۶۴}\Rightarrow(x-\frac{۳}{۸})^۲=\frac{۱۰۴+۹}{۶۴}=\frac{۱۱۳}{۶۴}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۳}{۸}\\ b=\frac{۱۱۳}{۶۴}\end{cases}\Rightarrow\frac{b}{a^۲}=\frac{۱۱۳}{\cancel{۶۴}}\times\frac{\cancel{۶۴}}{۹}=\frac{۱۱۳}{۹}$$

۲۰ - گزینه ۳ یک معادلهٔ درجه دوم با شرط $\Delta<۰$، جواب حقیقی ندارد، پس:

$$(-m)^۲-۴(۲)(-m)<۰\Rightarrow m^۲+۸m<۰$$

$$m(m+۸)=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۰\\ m+۸=۰\Rightarrow m=-۸\end{cases}$$

	-۸		۰	
$m^۲+۸m$	$+$	۰	$-$	۰ $+$

$$\Rightarrow\boxed{-۸<m<۰}$$

۲۱ - گزینه ۳ در تابع $f(x)=\frac{۳}{۲x^۲+۳x+۲}$، مخرج ریشه ندارد $(\Delta<۰)$، لذا ماکسیمم مقدار تابع زمانی اتفاق می‌افتد که مخرج کمترین مقدار خود را اختیار کند. کمترین مقدار سهمی $۲x^۲+۳x+۲$ در رأس سهمی اتفاق می‌افتد: در نتیجه:

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۳}{۴}\Rightarrow f(-\frac{۳}{۴})=\frac{۳}{۲(\frac{-۳}{۴})^۲+۳(\frac{-۳}{۴})+۲}=\frac{۲۴}{۷}$$

۲۲ - گزینه ۴

می‌دانیم: در سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$، رأس سهمی نقطهٔ $S(\frac{-b}{۲a},\frac{-\Delta}{۴a})$ است.

باتوجه به اینکه خط $y=-۴$ بر سهمی مماس است، پس از رأس سهمی عبور می‌کند.

عرض رأس سهمی: $\frac{-\Delta}{۴a}=-۴\Rightarrow\Delta=۱۶a\Rightarrow b^۲-۴ac=۱۶a\Rightarrow ۶۴-۴ac=۴a$

$$\Rightarrow ۱۶-ac=۴a\Rightarrow ۱۶=۴a+ac\Rightarrow ۱۶=a(۴+c)\quad(I)$$

سهمی محور xها را در $x=۲$ قطع می‌کند؛ بنابراین داریم:

$$(۲,۰):\ ۴a-۱۶+c=۰\Rightarrow ۴a+c=۱۶\Rightarrow c=۱۶-۴a\quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} ۱۶=a(۴+۱۶-۴a)\Rightarrow ۲۰a-۴a^۲=۱۶\Rightarrow ۴a^۲-۲۰a+۱۶=۰$$

$$\Rightarrow a^۲-۵a+۴=۰\Rightarrow (a-۱)(a-۴)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ a=۴ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} c=۱۶-۴a=۱۲ \\ c=۱۶-۴a=۰ \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a+c=۱۳ \\ a+c=۴ \end{cases}$$

۲۳ - گزینه ۲ دو نقطه محل برخورد سهمی با محور x ها نسبت به محور تقارن قرینه‌اند؛ پس اگر طول نقطه دیگر را x فرض کنیم باید میانگین طول دو نقطه ۳ باشد:

$$\frac{x+۸}{۲}=۳\Rightarrow x+۸=۶\Rightarrow x=-۲$$

پس مختصات نقطه دیگر $(-۲,۰)$ است.

۲۴ - گزینه ۳

در معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با: $\frac{c}{a}$.

$$\frac{x}{x-۲}+\frac{۱}{x}=۳\Rightarrow \frac{x^۲+(x-۲)}{\underbrace{x(x-۲)}_{x^۲-۲x}}=۳\Rightarrow x^۲+x-۲=۳x^۲-۶x\Rightarrow ۲x^۲-۷x+۲=۰$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است.

حاصل ضرب ریشه‌ها: $\frac{c}{a}=\frac{۲}{۲}=۱$

۲۵ - گزینه ۱ سهمی موردنظر با محور x فقط در نقطه‌ای به طول $x=-۲$ مشترک است، یعنی یک ریشه مضاعف دارد و معادلهٔ آن به شکل زیر است:

$$y=a(x+۲)^۲$$

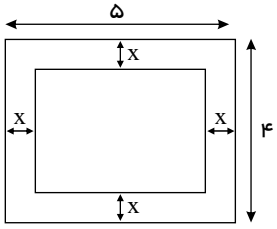
سهمی، محور عرض‌ها را در $-\frac{۴}{b}$ قطع می‌کند.

$$\left.\begin{array}{l} x=۰\Rightarrow y=۴a=-\frac{۴}{b}\Rightarrow b=-\frac{۱}{a} \\ y=a(x+۲)^۲=ax^۲+۴ax+۴a=ax^۲-bx+c\Rightarrow ۴a=-b \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow ۴a=-(-\frac{۱}{a})\Rightarrow a^۲=\frac{۱}{۴}\Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{سهمی پایین محور } x \text{ ها قراردارد.}} a=-\frac{۱}{۲}$$

۲۶ - گزینه ۲

باتوجه به شکل داریم:



$$(۵-۲x)(۴-۲x)=۱۲\Rightarrow ۴x^۲-۱۸x+۲۰=۱۲$$

$$\Rightarrow ۴x^۲-۱۸x+۸=۰\Rightarrow ۲x^۲-۹x+۴=۰$$

$$\Delta=۸۱-۴(۲)(۴)=۸۱-۳۲=۴۹\Rightarrow \sqrt{\Delta}=۷$$

$$x_{۱,۲}=\frac{۹\pm ۷}{۲(۲)}\Rightarrow \begin{cases} x_۱=\frac{۱۶}{۴}=۴ \text{ غ.ق.ق} \\ x_۲=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

(باتوجه به اینکه ابعاد قالی $(۴-۲x)$ و $(۵-۲x)$ منفی نمی‌شود)

۲۷ - گزینه ۴ روش اول:

می‌دانیم:

مختصات رأس سهمی به معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$، برابر است با: $S\left|\begin{matrix} -\frac{b}{۲a} \\ f(-\frac{b}{۲a}) \end{matrix}\right.$

فاصله در نقاط A و B برابر است با: $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$

$$y=a^۲x^۲+bx-c^۲$$

نقاط $(۲,۰)$، $(-۳,۰)$ و $(۳,۳)$ در معادلهٔ سهمی صدق می‌کنند، پس داریم:

$$\xrightarrow{(۲,۰)} ۴a^۲ + ۲b - c^۲ = ۰ \quad (I)$$

$$\xrightarrow{(-۳,۰)} ۹a^۲ - ۳b - c^۲ = ۰ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(۳,۳)} ۹a^۲ + ۳b - c^۲ = ۳ \quad (III)$$

$$(I),(II): - \begin{cases} ۴a^۲ + ۲b - c^۲ = ۰ \\ ۹a^۲ - ۳b - c^۲ = ۰ \end{cases}$$
$$-۵a^۲ + ۵b = ۰ \Rightarrow ۵(b - a^۲) = ۰ \Rightarrow b - a^۲ = ۰ \Rightarrow b = a^۲$$

با جایگذاری $b = a^۲$ در معادلات (II) و (III) داریم:

$$\begin{cases} ۴b + ۲b - c^۲ = ۰ \\ ۹b + ۳b - c^۲ = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶b - c^۲ = ۰ \\ ۱۲b - c^۲ = ۳ \end{cases}$$
$$۶b = ۳ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

$$۶b - c^۲ = ۰ \Rightarrow ۶b = c^۲ \xrightarrow{b=\frac{۱}{۲}} ۳ = c^۲$$

با جایگذاری مقادیر به‌دست آمده در معادلهٔ اصلی داریم:

$$y = \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۲}x - ۳$$

$$S\left|\begin{matrix} -\frac{b}{۲a} \\ f(-\frac{b}{۲a}) \end{matrix}\right. \Rightarrow S\left|\begin{matrix} \frac{-\frac{۱}{۲}}{۲(\frac{۱}{۲})} = -\frac{۱}{۲} \\ f(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} - ۳ = \frac{۱}{۸} - \frac{۲}{۸} - \frac{۲۴}{۸} = \frac{-۲۵}{۸} \end{matrix}\right.$$

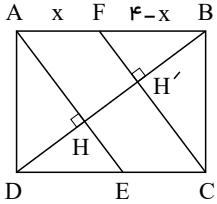
$$\begin{cases} S(-\frac{۱}{۲}, -\frac{۲۵}{۸}) \\ A(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۸}) \end{cases} \Rightarrow |AS| = \sqrt{(\frac{۱}{۲} - (-\frac{۱}{۲}))^۲ + (-\frac{۱}{۸} - (-\frac{۲۵}{۸}))^۲} = \sqrt{۱ + ۹} = \sqrt{۱۰}$$

روش دوم:

چون سهمی موردنظر دارای **۲** ریشهٔ **۲** و **۳−** است، آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$y = a^۲(x - ۲)(x + ۳) \xrightarrow{(۳,۳)} ۳ = a^۲(۳ - ۲)(۳ + ۳) \Rightarrow a^۲ = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow y = \frac{۱}{۲}(x - ۲)(x + ۳) = \frac{۱}{۲}(x^۲ + x - ۶) = \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۲}x - ۳$$
$$x_{\text{راس}} = -\frac{b}{۲a} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{۲ \times \frac{۱}{۲}} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow y_{\text{راس}} = \frac{۱}{۲} \times (-\frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۱}{۲} \times (-\frac{۱}{۲}) - ۳$$
$$= \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۴} - ۳ = -\frac{۲۵}{۸} \Rightarrow S' = (-\frac{۱}{۲}, -\frac{۲۵}{۸})$$
$$\text{فاصلهٔ نقطهٔ } S' \text{ از } (\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۸}) = \sqrt{(\frac{۱}{۲} - (-\frac{۱}{۲}))^۲ + (-\frac{۱}{۸} - (-\frac{۲۵}{۸}))^۲} = \sqrt{۱ + ۹} = \sqrt{۱۰}$$

۲۸ - گزینه ۱ مطابق شکل داریم:



$$\overset{\Delta}{ABD} : AB^۲ + AD^۲ = BD^۲ \to ۴^۲ + ۳^۲ = BD^۲ \to BD = ۵$$

$$\overset{\Delta}{ABD} : AD^۲ = DH \times BD \to ۹ = DH \times ۵ \to \begin{cases} DH = \frac{۹}{۵} \\ BH' = \frac{۹}{۵} \end{cases}$$

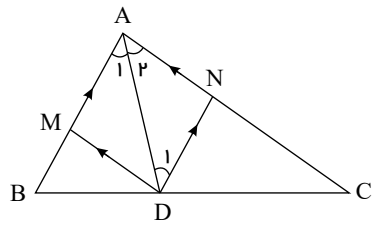
$$\rightarrow HH' = BD - DH - BH' = ۵ - \frac{۹}{۵} - \frac{۹}{۵} = \frac{۷}{۵}$$

$$\overset{\Delta}{ABH} : FH' \parallel AH \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BF}{AB} = \frac{BH'}{BH} \rightarrow \frac{۴-x}{۴} = \frac{\frac{۹}{۵}}{\frac{۱۶}{۵}} = \frac{۹}{۱۶} \rightarrow ۱۶ - ۴x = ۹ \rightarrow x = \frac{۷}{۴}$$

$$S_{AFCE} = AD \times AF = ۳ \times x = ۳ \times \frac{۷}{۴} = \frac{۲۱}{۴} = ۵/۲۵$$

۲۹ - گزینه ۳

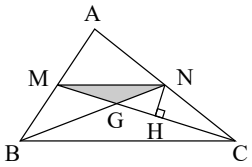
طبق فرض دو ضلع مقابل چهارضلعی را موازی هم رسم کرده‌ایم، پس چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است و داریم:



$$\begin{cases} AM \| DN \\ \text{مورب } AD \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{D}_۱ \xrightarrow{\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲} \hat{D}_۱ = \hat{A}_۲ \Rightarrow AN = DN \Rightarrow \cdot$$ متوازی‌الاضلاع به لوزی تبدیل می‌شود

یادآوری: متوازی‌الاضلاعی که دو ضلع مجاور آن برابر باشند، لوزی است.

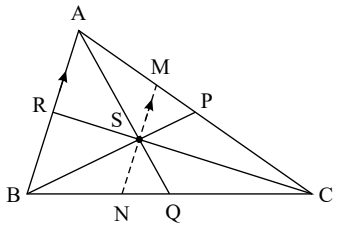
۳۰ - گزینه ۴ نقطه‌ی G محل برخورد میانه‌ها است. پس:



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{MGN}}}{S_{\overset{\Delta}{BGC}}} = \frac{\frac{۱}{۲}MG \times GN \times \sin\hat{G}}{\frac{۱}{۲}GC \times BG \times \sin\hat{G}} = \frac{MG}{GC} \times \frac{GN}{BG} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

$$S_{\overset{\Delta}{BGC}} = \frac{۱}{۳}S_{\overset{\Delta}{ABC}} \Rightarrow S_{\overset{\Delta}{MGN}} = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۳}S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۱۲}S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

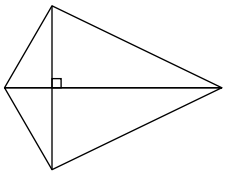
۳۱ - گزینه ۱ بدیهی است S محل تلاقی میانه‌هاست و با توجه به شکل داریم: $CS = \frac{۲}{۳}CR \Rightarrow \frac{CS}{CR} = \frac{۲}{۳}$، یعنی نسبت تشابه برابر است با $k = \frac{۲}{۳}$، درنتیجه خواهیم داشت:



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{MNC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = k^۲ = \frac{۴}{۹} \Rightarrow \begin{cases} S_{\overset{\Delta}{MNC}} = ۴k \\ S_{\overset{\Delta}{ABC}} = ۹k \end{cases} \Rightarrow S_{AMNB} = ۵k \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{MNC}}}{S_{AMNB}} = \frac{۴}{۵}$$

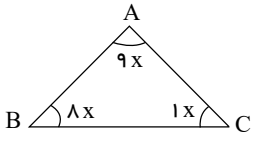
۳۲ - گزینه ۳

گزینه‌های **۱**، **۲** و **۴** قضیه‌های دو شرطی هستند. اما برای عکس قضیهٔ گزینهٔ **۳**، «اگر در یک چهارضلعی اندازهٔ دو قطر مساوی و عمود برهم باشند، آن‌گاه چهارضلعی مربع است.» مثال نقض وجود دارد، مانند شکل زیر:



۳۳ - گزینه ۲ فرض کنیم زوایای مثلث $x, ۸x, ۹x$ باشند. داریم:

$$x + ۸x + ۹x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۰^\circ$$

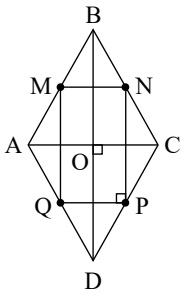


نکته: زوایای مثلث ۱۰° و ۸۰° و ۹۰° اند، پس مثلث قائم‌الزاویه است. در مثلث قائم‌الزاویه، زاویهٔ بین ارتفاع و میانه وارد بر وتر، برابر است با قدرمطلق تفاضل دو زاویهٔ حاده مثلث.

بنابراین زاویهٔ بین ارتفاع و میانهٔ وارد بر وتر برابر است با:

$$|\hat{B} - \hat{C}| = ۸۰^\circ - ۱۰^\circ = ۷۰^\circ$$

۳۴ - گزینه ۴

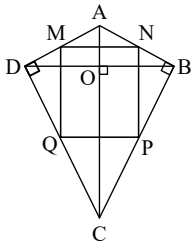


$$\text{محیط مستطیل } MNPQ = ۲(MN+NP) = ۲(\frac{۱}{۲}BD + \frac{۱}{۲}AC) = AC + BD$$

$$\overset{\Delta}{OAB} \text{ بنابر نامساوی مثلث در } : OA + OB > AB \to ۲OA + ۲OB > ۲AB \xrightarrow{AB=۵} AC + BD > ۱۰$$

در بین گزینه‌ها تنها عدد **۱۱** امکان‌پذیر است.

۳۵ - گزینه ۲



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ADC} \xrightarrow{\text{تالس}} MQ = \frac{AC}{۲} \\ \overset{\Delta}{ABC} \xrightarrow{\text{تالس}} NP = \frac{AC}{۲} \end{cases} \xrightarrow{+} MQ + NP = AC \quad (۲) \qquad \begin{cases} \overset{\Delta}{ABD} \xrightarrow{\text{تالس}} MN = \frac{DB}{۲} \\ \overset{\Delta}{CBD} \xrightarrow{\text{تالس}} QP = \frac{DB}{۲} \end{cases} \xrightarrow{+} MN + QP = DB \quad (۱)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \underbrace{MN + QP + MQ + NP}_{\text{محیط ۴ ضلعی}} = DB + AC$$

$$\overset{\Delta}{ABC} : AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ \to AC^۲ = ۹ + ۳۶ \to AC = ۳\sqrt{۵}$$

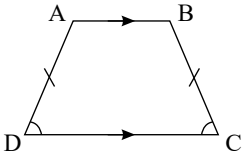
$$\overset{\Delta}{ABC} : AB \times BC = BO \times AC \to ۶ \times ۳ = BO \times ۳\sqrt{۵} \to BO = \frac{۶}{\sqrt{۵}}$$

$$\to DB = \frac{۱۲}{\sqrt{۵}} = \frac{۱۲\sqrt{۵}}{۵}$$

$$\text{محیط } (MNPQ) = DB + AC = \frac{۲۷\sqrt{۵}}{۵}$$

۳۶ - گزینه ۲ هرگاه در مثلثی میانهٔ وارد بر ضلعی نصف طول آن ضلع باشد، آن مثلث در زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع، قائمه است. پس مثلث ABC در رأس A قائمه است.

۳۷ - گزینه ۲ مثال نقض گزینهٔ **۲** ذوزنقه متساوی‌الساقین است؛ زیرا دو ضلع برابر و دو زاویهٔ برابر دارد ولی متوازی‌الاضلاع نیست.



$$\begin{cases} AD = BC \\ \hat{D} = \hat{C} \end{cases}$$

۳۸ - گزینه ۴ نکته: اگر در یک چهارضلعی قطرها با یکدیگر برابر و برهم عمود باشند، از به‌هم وصل کردن وسط اضلاع این چهار ضلعی، یک مربع حاصل می‌شود و از آنجایی که در هر مربع، قطرها باهم برابر بوده و برهم عمودند، بنابراین تنها گزینه درست گزینهٔ «**۴**» است.

۳۹ - گزینه ۴

$$AD = BC \to ۲MD = ۲BN \to \begin{matrix} MD = BN \\ MD \parallel BN \end{matrix} \Big\}$$

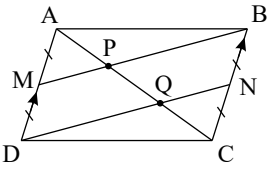
چهارضلعی $MBND$ متوازی‌الاضلاع است زیرا دو ضلع مقابل موازی و مساوی دارد.

$$\overset{\Delta}{ABP} : QN \parallel BP \xrightarrow{\text{تالس جز به کل}} \frac{CN}{CB} = \frac{QN}{PB} \to \frac{۱}{۲} = \frac{QN}{PB} \to PB = ۲QN$$

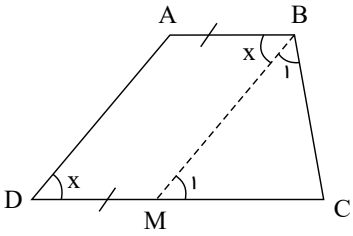
به طریق مشابه در مثلث ADQ می‌توان نشان داد: $DQ = ۲MP$

$$MB = DN \rightarrow MP + PB = DQ + QN \rightarrow MP + ۲QN = ۲MP + QN$$

$$\rightarrow MP = QN = ۳ \rightarrow DQ = ۲MP = ۲ \times ۳ = ۶$$



۴۰ - گزینه ۲ از B به موازات ساق AD خطی را رسم می‌کنیم. چهارضلعی $ABMD$ متوازی‌الاضلاع است در نتیجه:



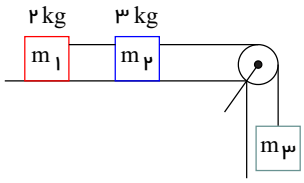
$AB = DM \quad (۱)$

$\Rightarrow BC = MC \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{B}_۱ = x$ طبق فرض : $AB + BC = DC \cancel{AB} + BC = \underbrace{DM}_{\cancel{AB}} + MC$

$\hat{M}_۱ + \hat{B}_۱ = ۱۸۰^\circ - \hat{C} \Rightarrow ۲x = ۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ = ۱۰۰^\circ \Rightarrow x = ۵۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۱۸۰^\circ - x = ۱۳۰^\circ$

پاسخنامه تشریحی

۴۱ - گزینه ۲ در ابتدا با توجه به معلوم بودن جرم‌ها و انرژی جنبشی کل وزنه‌های $m_۱$ و $m_۲$، تندی آنها را می‌یابیم.



در هر لحظه $v_۱ = v_۲ = v_۳ = v$

$$K_۱ + K_۲ = ۲۲/۵ \Rightarrow \frac{۱}{۲}m_۱v^۲ + \frac{۱}{۲}m_۲v^۲ = ۲۲/۵$$

$$\Rightarrow \frac{v^۲}{۲}(m_۱ + m_۲) = ۲۲/۵ \Rightarrow \frac{v^۲}{۲}(۲ + ۳) = ۲۲/۵ \Rightarrow v = ۳\frac{m}{s}$$

در اینجا کار نیروی وزن وزنهٔ $m_۳$ با تغییر انرژی جنبشی کل دستگاه (یعنی وزنه‌های $m_۱$ و $m_۲$ و $m_۳$) برابر است. بنابراین داریم:

$$m_۳gh = \frac{۱}{۲}(m_۱ + m_۲ + m_۳)v^۲ \Rightarrow m_۳ \times ۱۰ \times \frac{۹}{۱۰} = \frac{۱}{۲}(۲ + ۳ + m_۳)(۳^۲) \Rightarrow m_۳ = ۵kg$$

۴۲ - گزینه ۴ چون جهت حرکت مشخص نیست، می‌توان نتیجه گرفت نوع حرکت ممکن است هر سه مدل ذکر شده باشد و بنابراین h یا Δy نیز ممکن است افزایش یا کاهش یابد و یا حتی ابتدا کاهش و سپس افزایش بیابد و طبق رابطهٔ $W_{mg} = mgh$ می‌توان گفت W_{mg} نیز بسته به شرایط ممکن است افزایش، کاهش و یا ابتدا کاهش و سپس افزایش بیابد.

۴۳ - گزینه ۴

چون انرژی جنبشی جسم ساکن B، بعد از برخورد، معادل $\frac{۱}{۲}$ انرژی جنبشی جسم A شده و از طرفی $\frac{۱}{۴}$ انرژی جنبشی اولیهٔ جسم A به گرما تبدیل شده، پس طبق پایستگی انرژی، انرژی جنبشی ثانویهٔ جسم A، معادل $\frac{۱}{۴}$ انرژی جنبشی اولیهٔ آن است. یعنی:

$$K_B = \frac{۱}{۲}K_A \rightarrow \frac{۱}{۲}m_Bv_B^۲ = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}m_Av_A^۲ \xrightarrow{m_B = ۲m_A} ۲m_Av_B^۲ = \frac{۱}{۲}m_Av_A^۲ \rightarrow v_B^۲ = \frac{۱}{۴}v_A^۲ \rightarrow v_B = \frac{۱}{۲}v_A$$

$$K'_A = \frac{۱}{۴}K_A \rightarrow \frac{۱}{۲}m_Av'^۲_A = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲}m_Av_A^۲ \rightarrow v'^۲_A = \frac{۱}{۴}v_A^۲ \rightarrow v'_A = \frac{۱}{۲}v_A$$

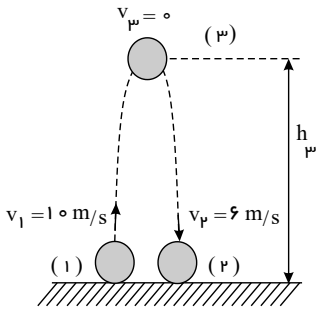
v'_A: سرعت جسم A پس از برخورد

K'_A: انرژی جنبشی جسم A پس از برخورد

$$\rightarrow \frac{v'_A}{v_B} = \frac{\frac{۱}{۲}v_A}{\frac{۱}{۲}v_A} = ۱$$

۴۴ - گزینه ۳

با در نظرگرفتن سطح زمین به عنوان مرجع انرژی پتانسیل گرانشی و استفاده از قانون پایستگی انرژی داریم:



$$W_{\text{مقاوم(صعود)}} = W_{\text{مقاوم(سقوط)}} = \frac{۱}{۲}W_{\text{مقاوم}} \Rightarrow W_{\text{مقاوم}} = E_۲ - E_۱ = (K_۲ + U_۲) - (K_۱ + U_۱)$$

$$= (\frac{۱}{۲}mv_۲^۲ + mgh_۲) - (\frac{۱}{۲}mv_۱^۲ + mgh_۱) \xrightarrow{h_۱ = ۰ \ , \ h_۲ = ۰} W_{\text{مقاوم}} = \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ - \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲)$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۲ \times (۶^۲ - ۱۰^۲) = -۶۴J \Rightarrow W_{\text{مقاوم(صعود)}} = W_{\text{مقاوم(صعود)}} = -۳۲J$$

اگر حرکت جسم را فقط در هنگام صعود در نظر بگیریم:

$$W_{\text{مقاوم(صعود)}} = E_۳ - E_۱ = (K_۳ + U_۳) - (K_۱ + U_۱)$$

$$= (\frac{۱}{۲}mv_۳^۲ + mgh_۳) - (\frac{۱}{۲}mv_۱^۲ + mgh_۱) \xrightarrow{v_۳ = ۰ \ , \ h_۱ = ۰} W_{\text{مقاوم(صعود)}} = mgh_۳ - \frac{۱}{۲}mv_۱^۲$$

$$\Rightarrow -۳۲ = ۲ \times ۱۰ \times h_۳ - \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۱۰^۲ \Rightarrow -۳۲ = ۲۰h_۳ - ۱۰۰ \Rightarrow h_۳ = ۳/۴m$$

روش دوم: قضیهٔ کار و انرژی را دوبار می‌نویسیم:

در رفت: $W_f + W_g = K_{اوج} - K_۱ \rightarrow -mgh + W_f = -K_۱$

در برگشت: $W_f + W_g = K_۲ - K_{اوج} \rightarrow mgh + W_f = K_۲$

با کم کردن دو رابطه از هم داریم:

$$۲mgh = K_۲ + K_۱ = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ + v_۱^۲) \rightarrow ۲ \times ۱۰ \times h = \frac{۱}{۲}(۳۶ + ۱۰۰) \rightarrow h = ۳/۴m$$

۴۵ - گزینه ۱

می‌دانیم : $W_{mg} = -\Delta U_g \quad (*)$ (تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی)

برای هر سه گلوله:

$$\Delta U_g = U_{۲g} - U_{۱g}$$

اگر سطح زمین را مبنای پتانسیل گرانشی فرض کنیم:

$$U_{۲g} = ۰ \rightarrow \Delta U_g = -U_{۱g} - mgh \quad (**)$$

$$\xrightarrow{*,\ **} W_{mg} = -(-mgh) = mgh$$

چون m و h برای هر سه گلوله یکسان است:

$$(W_{mg})_۱ = (W_{mg})_۲ = (W_{mg})_۳$$

طبق رابطهٔ $W_{mg} = mgh$، با توجه به مشابه بودن توپ‌ها و ارتفاع یکسان آنها تا زمین، کار نیروی وزن بر روی هر سه توپ یکسان است.

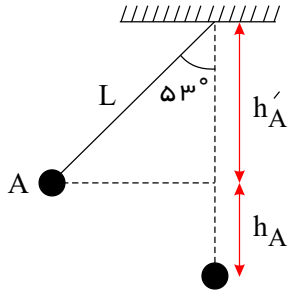
۴۶ - گزینه ۳ با استنباط از متن تست داده‌شده چنین برمی‌آید $W_۱$ و $W_۲$ کار نیروی خالص وارد بر جسم است که تغییرات سرعت جسم منوط به انجام این کار است.

$$W_t = \Delta K = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) \rightarrow \begin{cases} W_۱ = \frac{۱}{۲}m(v^۲ - ۰^۲) = \frac{۱}{۲}mv^۲ \\ W_۲ = \frac{۱}{۲}m((۳v)^۲ - v^۲) = ۴mv^۲ \end{cases} \rightarrow \frac{W_۲}{W_۱} = ۸$$

۴۷ - گزینه ۳ ابتدا ارتفاع گلولهٔ A نسبت به پایین‌ترین نقطهٔ مسیرش را به دست می‌آوریم:

$$\cos ۵۳^\circ = \frac{h'_A}{L} \Rightarrow ۰/۶ = \frac{h'_A}{۱} \Rightarrow h'_A = ۰/۶m$$

$$h_A = L - h'_A \Rightarrow h_A = ۱ - ۰/۶ \Rightarrow h_A = ۰/۴m$$



با توجه به اصل پایستگی انرژی بین نقطهٔ A و پایین‌ترین نقطهٔ مسیر (نقطهٔ صفر پتانسیل) می‌توان گفت:

$$E_A = E_۰ \Rightarrow \cancel{K_A}^{۰} + U_A = K_۰ + \cancel{U_۰}^{۰} \Rightarrow mgh_A = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow ۱۰ \times ۰/۴ = \frac{۱}{۲} \times v^۲$$

سرعت در پایین‌ترین نقطه: $v^۲ = ۸ \Rightarrow v = ۲\sqrt{۲}\frac{m}{s}$

اکنون می‌توان اصل پایستگی انرژی را بین نقطهٔ موردنظر سوال (B) و نقطهٔ A نوشت:

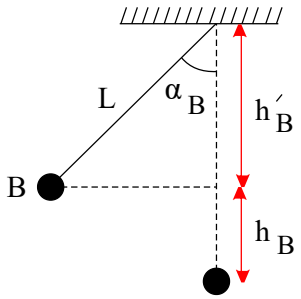
$$E_A = E_B \Rightarrow U_A + \cancel{K_A}^{۰} = U_B + K_B \Rightarrow mgh_A = mgh_B + \frac{۱}{۲}mv_B^۲$$

$$\xrightarrow{v_B = \frac{\sqrt{۲}}{۲}v} ۱۰ \times ۰/۴ = (۱۰ \times h_B) + \frac{۱}{۲} \times (\frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۲\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow ۴ = ۱۰h_B + ۲ \Rightarrow h_B = ۰/۲m$$

بنابراین درمورد زاویهٔ نخ با راستای قائم می‌توان گفت:

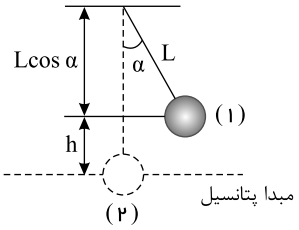
$h'_B = L - h_B \Rightarrow h'_B = ۰/۸m$

$\cos\alpha_B = \frac{h'_B}{L} \Rightarrow \cos\alpha_B = \frac{۰/۸}{۱} \Rightarrow \alpha_B = ۳۷^\circ$



۴۸ - گزینه ۳ با توجه به قانون پایستگی انرژی می‌توان نوشت:

$E_۱ = E_۲ \Rightarrow mgh = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow ۱۰ \times h = \frac{۱}{۲} \times (۴)^۲ \Rightarrow h = ۰/۸m$



از طرفی داریم:

$L = L\cos\alpha + h \Rightarrow ۱/۶ = ۱/۶\cos\alpha + ۰/۸ \Rightarrow ۰/۸ = ۱/۶\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha = ۶۰^\circ$

نکته: هنگامی که گلوله به بالاترین نقطهٔ مسیر خود می‌رسد، سرعت آن و درنتیجه انرژی جنبشی صفر است و هنگامی که یک گلوله به پایین‌ترین نقطهٔ مسیر خود می‌رسد، می‌توان آن ارتفاع را مبدأ پتانسیل در نظر گرفت و درنتیجه انرژی پتانسیل گرانشی در آن نقطه صفر است.

۴۹ - گزینه ۱

با توجه به روابط مثلثاتی در مثلث می‌توان طول مسیر حرکت روی سطح شیبدار را به دست آورد:

$\sin ۳۷^\circ = \frac{۶}{d} \Rightarrow d = ۱۰m$

با توجه به عدم پایستگی انرژی داریم:

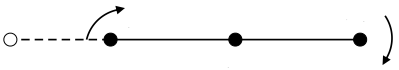
$E_۱ - E_۲ = |W_f| \Rightarrow (U_{g_۱} + \cancel{K_۱}^{\circ}) - (\cancel{U_{g_۲}}^{\circ} + K_۲) = |W_f|$

$\Rightarrow mgh_۱ - \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ = |f \cdot d\cos\alpha| \Rightarrow ۲ \times ۱۰ \times ۶ - \frac{۱}{۲} \times ۲ \times v_۲^۲ = |۴ \times ۱۰ \times \cos ۱۸۰|$

$۱۲۰ - v_۲^۲ = ۴۰ \Rightarrow v_۲^۲ = ۸۰ \Rightarrow v_۲ = ۴\sqrt{۵}\frac{m}{s}$

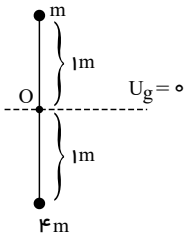
۵۰ - گزینه ۳ برای حل این تست قدم به قدم پیش می‌رویم:

قدم اول) حالت افقی میله را مبدأ پتانسیل گرانشی فرض می‌کنیم و چون ساکن است:



$E_۱ = U_۱ + K_۱ = ۰ \rightarrow E_۱ = ۰$

قدم دوم) حالت عبور میله از امتداد قائم را در نظر می‌گیریم:



$\begin{cases} E_۲ = U_۲ + K_۲ = \underbrace{[(۴m)g(-۱) + (m)g(+۱)]}_{U_۲} + K_۲ \\ U_۲ = -۳mg \end{cases}$

قدم سوم) قانون پایستگی انرژی:

$E_۲ = E_۱ \rightarrow K_۲ - ۳mg = ۰ \rightarrow \underbrace{[\frac{۱}{۲}(۴m)v^۲ + \frac{۱}{۲}mv^۲]}_{K_۲} = ۳mg \rightarrow \frac{۵}{۲}\cancel{m}v^۲ = ۳\cancel{m}g \rightarrow v = \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳}m/s$

۵۱ - گزینه ۴ با توجه به این که اصطکاک وجود ندارد، انرژی مکانیکی پایسته می‌ماند:

$E_A = E_B \Rightarrow mgh_A + ۰ = mgh_B + \frac{۱}{۲}mv_B^۲ \Rightarrow ۳۰۰ = ۱۲۰ + \frac{۱}{۲}v_B^۲ \Rightarrow v_B^۲ = ۳۶۰$

$E_C = E_A \Rightarrow mgh_C + \frac{۱}{۲}mv_C^۲ = mgh_A + ۰ \Rightarrow ۲۴۰ + \frac{۱}{۲}v_C^۲ = ۳۰۰ \Rightarrow v_C^۲ = ۱۲۰$

$\Rightarrow \frac{v_B}{v_C} = \sqrt{\frac{۳۶۰}{۱۲۰}} = \sqrt{۳}$

۵۲ - گزینه ۱ نکته: سطح زیر نمودار نیرو برحسب جابه‌جایی برابر با کار برایند نیروهای وارد بر جسم است: با توجه به نکتهٔ بالا و قضیهٔ کار و انرژی جنبشی داریم:

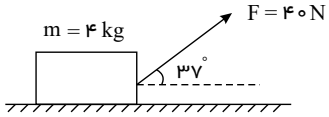
$S = W_t$

$S = \Delta K \rightarrow \frac{۲۰ \times ۳۰}{۲} = \frac{۱}{۲} \times ۲(v_۲^۲ - ۰) \rightarrow v_۲^۲ = ۳۰۰ \rightarrow v_۲ = ۱۰\sqrt{۳} m/s$

۵۳ - گزینه ۴ به چترباز در حین حرکت دو نیروی وزن و مقاومت هوا وارد می‌شود.

$$\begin{cases} W_t = W_{mg} + W_{f_D} = \Delta K \Rightarrow mgd\cos ۰ + W_{f_D} = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲) \\ \Rightarrow ۱۰۰۰ \times ۵۰۰ \times (۱) + W_{f_D} = \frac{۱}{۲}(۱۰۰)(۴٫۵^۲ - ۱٫۵^۲) \Rightarrow W_{f_D} = ۵۰(\underbrace{۲۰٫۲۵ - ۲٫۲۵}_{۱۸}) - ۵ \times ۱۰^۵ \\ \Rightarrow W_{f_D} = ۹۰۰ - ۵۰۰۰۰۰ = -۴۹۹۱۰۰J = -۴۹۹٫۱kJ \end{cases}$$

۵۴ - گزینه ۲ در اینجا دو نیروی F واصطکاک در جابه‌جایی جسم به اندازهٔ ۱٫۶ را متر، روی آن کار انجام می‌دهند، بنابراین با استفاده از قضیهٔ کار و انرژی جنبشی داریم:



$d = ۱٫۶m$

$v_۱ = ۰, v_۲ = ۴m/s$

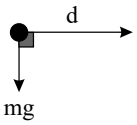
$W_t = \Delta K \rightarrow W_F + \underbrace{W_{F_N}}_{\text{صفر}} + \underbrace{W_{mg}}_{\text{صفر}} + W_{f_k} = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - v_۱^۲)$

$\rightarrow Fd\cos ۳۷^\circ + f_k d\cos ۱۸۰^\circ = \frac{۱}{۲}m(v_۲^۲ - ۰^۲)$

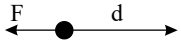
$\rightarrow ۴۰ \times ۱٫۶ \times \frac{۸}{۱۰} + f_k \times ۱٫۶ \times (-۱) = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times (۴^۲) = ۳۲$

$\rightarrow ۵۱٫۲ - ۱٫۶f_k = ۳۲ \rightarrow \boxed{f_k = ۱۲N}$

۵۵ - گزینه ۲ طبق فرض سؤال گلوله افقی حرکت می‌کند، پس کار نیروی وزن صفر است:



$W_{mg} = (mg)(d)(\cos ۹۰^\circ) = ۰$



$W_F = Fd\underbrace{\cos ۱۸۰^\circ}_{-۱} = -Fd$

$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{mg} + W_F = \frac{۱}{۲}m(v^۲ - v_۰^۲) \Rightarrow W_F = \frac{۱}{۲}(\frac{۴}{۱۰۰})(۰^۲ - ۳۰۰^۲) \Rightarrow W_F = \frac{-۲}{۱۰۰} \times ۹ \times ۱۰^۴ = -۱۸۰۰J \Rightarrow W_F = -۱۸۰۰J$

۵۶ - گزینه ۲

چون اصطکاک نداریم ($W_f = ۰$) می‌توان از اصل پایستگی انرژی بین نقاط A و B استفاده کرد:

$E_A = E_B \Rightarrow mgh_A + \frac{۱}{۲}mv_A^۲ = mgh_B + \frac{۱}{۲}mv_B^۲ \Rightarrow gh_A + \frac{۱}{۲}v_A^۲ = gh_B + \frac{۱}{۲}v_B^۲$

$۱۰ \times ۴ + \frac{۱}{۲}(۲)^۲ = ۱۰ \times ۱ + \frac{۱}{۲}v_B^۲ \xrightarrow{\text{با ضرب طرفین در } ۲} ۸۰ + ۴ = ۲۰ + v_B^۲ \Rightarrow v_B^۲ = ۶۴ \Rightarrow v_B = \sqrt{۶۴} = ۸m/s$

۵۷ - گزینه ۴ کار نیروی وزن به تغییر ارتفاع که در هر سه مسیر یکسان است بستگی دارد. بنابراین: $W_{mg_۱} = W_{mg_۲} = W_{mg_۳}$

چون اندازهٔ نیروی مقاومت هوا در هر سه مسیر برابر است و طول مسیر (۱) از (۲) و طول مسیر (۲) از (۳) بیشتر است کار نیروی اصطکاک در مسیر (۱) بیشتر از (۲) و در مسیر (۲) بیشتر از (۳) است. بنابراین انرژی جنبشی در انتهای مسیر (۳) بیشتر از (۲) و در (۲) بیشتر از (۱) است.

۵۸ - گزینه ۲

پایستگی انرژی مکانیکی : $E_A = E_C \Rightarrow mgh_A + \frac{۱}{۲}mV_A^۲ = U_e$

$$\Rightarrow ۲ \times ۱۰ \times (۰/۲ + x\sin ۳۰^\circ) + \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۲^۲ = ۱۰$$

$$۲۰(۰/۲ + \frac{x}{۲}) + ۴ = ۱۰ \Rightarrow x = ۰/۲m = ۲۰\ cm$$

۵۹ - گزینه ۴ جسم به‌سمت بالا حرکت کرده است، بنابراین:

$$W_{mg} = -۴۵۰J \Rightarrow \Delta W = -W_{mg} = ۴۵۰J$$

$$\Delta U = U_B - U_A = mgh_B - mgh_A = ۳۰ \times ۶۰ - ۳۰ \times h_A = ۳۰(۶۰ - h_A)$$

$$\Delta U = -W_{mg} \Rightarrow ۳۰(۶۰ - h_A) = -(-۴۵۰)J \Rightarrow h_A = ۴۵m$$

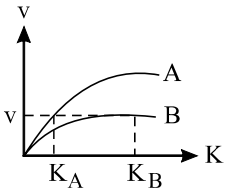
۶۰ - گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l} W_F = Fd\cos\theta_F = ۲۰ \times ۵ \times \cos ۶۰^\circ = ۵۰J \\ W_f = fd\cos\theta_f = ۵ \times ۵ \times \cos ۱۸۰^\circ = -۲۵J \\ W_{\text{وزن}} = ۰ \quad , \quad W_{\text{نیروی عمودی تکیه‌گاه}} = ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow W_t = W_F + W_f + W_{\text{وزن}} + W_{\text{نیروی عمودی تکیه‌گاه}}$$

$$\Rightarrow W_t = ۲۵J$$

۶۱ - گزینه ۳

توجه کنید که گزینه‌ها، نمودار v برحسب K را نشان می‌دهند. درنتیجه گزینه‌های **۱** و **۲** حذف می‌شوند. می‌دانیم که به‌ازای تندی یکسان جسمی که جرم بیشتری دارد، انرژی جنبشی بیشتری نیز خواهد داشت.



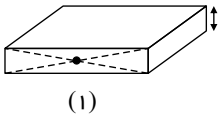
۶۲ - گزینه ۴ در حرکت جسم بر روی سطح شیب‌دار، دو نیروی وزن و اصطکاک بر روی جسم کار انجام می‌دهند. بنا به قضیهٔ کار و انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{mg} + W_{f_k} = K_۲ - K_۱ \xrightarrow{K_۲=۰} -mgh - f_k d = ۰ - \frac{۱}{۲}mv_۱^۲$$

$$\xrightarrow{h=d\times\sin ۳۰^\circ} -۲ \times ۱۰ \times (\frac{۱}{۲} \times d) - ۴۰d = -\frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۴۰۰ \Rightarrow -۵۰d = -۴۰۰ \Rightarrow d = ۸m$$

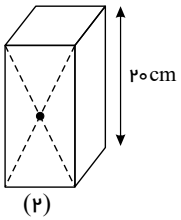
۶۳ - گزینه ۳ انرژی پتانسیل کمیتی نسبی و مقایسه‌ای است؛ بنابراین باید انرژی پتانسیل جسم را در مکانی خاص (مبدأ پتانسیل) برابر صفر در نظر بگیریم.

در حالت «۱»: ارتفاع مرکز ثقل از سطح تکیه‌گاه (مبدأ پتانسیل) برابر $۲/۵cm$ است.



(۱)

در حالت «۲»: ارتفاع مرکز ثقل از سطح تکیه‌گاه (مبدأ پتانسیل) برابر $۱۰cm$ است.



(۲)

$$\Delta U_g = U_{g_۲} - U_{g_۱} = mg(h_۲ - h_۱)$$

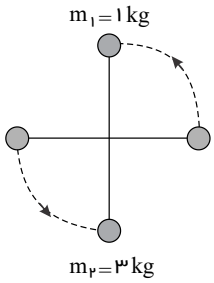
$$\Delta U_g = ۲ \times ۱۰ \times (۱۰ - ۲/۵) \times ۱۰^{-۲} = ۱/۵J$$

۶۴ - گزینه ۳ K_A و K_B مجموع انرژی‌های جنبشی دو جسم در شروع و پایان جابه‌جایی است. دقت کنید که چون گلوله‌ها با میله به هم متصل هستند تندی آنها برابر است.

$$W_{m_۱g} + W_{m_۲g} = K_B - \cancel{K_A}^{۰}$$

$$-m_۱g|\Delta h| + m_۲g|\Delta h| = \frac{۱}{۲}(m_۱ + m_۲)v^۲$$

$$-۱۰ \times ۲ + ۳۰ \times ۲ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times v^۲ \Rightarrow v = ۲\sqrt{۵}\frac{m}{s}$$



۶۵ - گزینه ۱ جابه‌جایی در راستای قائم از نقطهٔ A تا نقطهٔ B معادل **۴** متر است. بنابراین با توجه به اینکه جسم از A تا B، به طرف پایین جابه‌جا شده داریم:

$W_{mg} = +mgh_{AB} = ۴ \times ۱۰ \times ۴$

$\rightarrow W_{mg} = ۱۶۰J$

۶۶ - گزینه ۳ بر طبق قضیهٔ کار و انرژی جنبشی داریم: $W_t = \Delta K$

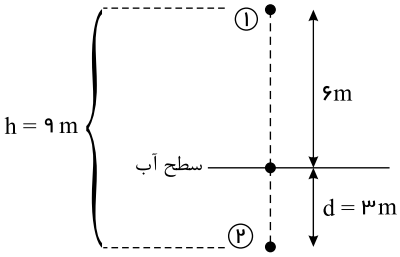
از آنجایی که در راستای افق اصطکاک نداریم، تنها نیرویی که در این راستا کار انجام می‌دهد، نیروی F است. بنابراین:

$W_F = K_۲ - \cancel{K_۱}^{\circ} \rightarrow W = \frac{۱}{۲}mv^۲$

روشن است که نمودار W بر حسب v یک سهمی است با جهت تقعر رو به بالا.

۶۷ - گزینه ۳ با توجه به متن سؤال از نقطهٔ (۱) تا سطح آب نیروی اتلافی نداریم، ولی از سطح آب تا نقطهٔ (۲) نیروی اتلافی داریم:

$E_۱ = E_۲ + |W_F|$



انرژی پتانسیل را نسبت به نقطهٔ (۲) می‌سنجیم:

$\cancel{K_۱}^{\circ} + U_{g_۱} = \cancel{K_۲}^{\circ} + \cancel{U_{g_۲}}^{\circ} + |W_F|$

$mgh = F \cdot d$

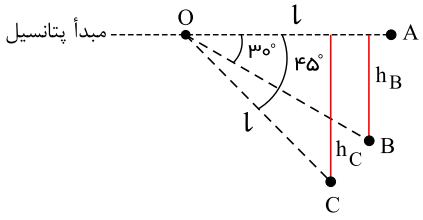
$۶۰ \times ۱۰ \times ۹ = F \times ۳ \rightarrow F = ۱۸۰۰N = ۱٫۸\ kN$

۶۸ - گزینه ۳ قانون پایستگی انرژی مکانیکی را یک بار بین A و B و یک بار بین A و C می‌نویسیم:

$E_A = E_B \rightarrow K_A + \cancel{U_{g_A}}^{\circ} = K_B + U_{g_B}$

$\frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۱۰^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times v_B^۲ - ۲ \times ۱۰ \times ۱ \rightarrow v_B^۲ = ۱۲۰$

مبدأ پتانسیل را منطبق بر تراز عبوری از نقطهٔ A در نظر می‌گیریم.



$h_B = ۲\sin ۳۰^{\circ}$

$h_C = ۲\sin ۴۵^{\circ}$

$h_B = h\sin ۳۰^{\circ}$

$h_C = h\sin ۴۵^{\circ}$

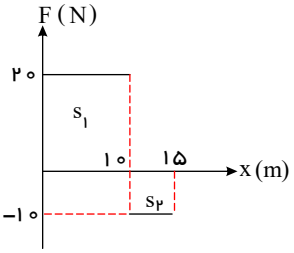
$E_A = E_C \rightarrow K_A + \cancel{U_{g_A}}^{\circ} = K_C + U_{g_C}$

$\frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۱۰^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times v_C^۲ - ۲ \times ۱۰ \times ۲\sin ۴۵^{\circ} \rightarrow v_C^۲ = ۱۲۸$

$\frac{v_B}{v_C} = \sqrt{\frac{۱۲۰}{۱۲۸}} = \frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$

۶۹ - گزینه ۲ مساحت بین این نمودار نیرو - مکان و محور مکان برابر کار نیرو است.

$$W_F = S_1 - S_2 = ۲۰۰ - ۵۰ = ۱۵۰J$$



۷۰ - گزینه ۳

$$K_۲ = \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ \to ۲K_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۱۰^۲ \to K_۱ = ۵۰J$$

$$K_۱ = \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ \to ۵۰ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times v_۱^۲ \to v_۱ = \sqrt{۵۰}m/s = ۵\sqrt{۲}m/s$$

۷۱ - گزینه ۴ با استفاده از قضیهٔ کار - انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$W_t = K_۲ - K_۱ \Rightarrow W_{وزن} + W_{موتور} = K_۲ - K_۱ \Rightarrow -mg(h_۲ - h_۱) + P_{موتور}\Delta t = \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ - \frac{۱}{۲}mv_۱^۲$$

$$\xrightarrow[P_{موتور}=۷۵۰W,\Delta t=۱۰min=۱۰\times۶۰=۶۰۰s,v_۱=۰]{m=۳ton=۳\times۱۰^۳kg,g=۱۰\,m/s^۲,h_۲=۳m,h_۱=-۹m} -(۳ \times ۱۰^۳) \times ۱۰ \times (۳ - (-۹)) + ۷۵۰ \times ۶۰۰$$

$$= \frac{۱}{۲} \times (۳ \times ۱۰^۳) \times v_۲^۲ - ۰ \Rightarrow -۳۶۰۰۰۰ + ۴۵۰۰۰۰ = ۱۵۰۰v_۲^۲ \Rightarrow ۹۰۰۰۰ = ۱۵۰۰v_۲^۲$$

$$\Rightarrow v_۲^۲ = \frac{۹۰۰۰۰}{۱۵۰۰} = ۶۰ \Rightarrow v_۲ = ۲\sqrt{۱۵}\,m/s$$

گزینه ۳ - ۷۲

در اینجا تنها نیرویی که کار انجام می‌دهد، نیروی وزن است. بنابراین با استفاده از به کارگیری قضیهٔ کار و انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K \to W_{mg} = K_۲ - K_۱$$

$$\to \cancel{m}\, gh = \frac{۱}{۲}\cancel{m}\,(v_۲^۲ - v_۱^۲) \to h = ۵۵ - ۳۰ = ۲۵m \to ۱۰ \times ۲۵ = \frac{۱}{۲}(v_۲^۲ - ۲۰^۲) \to v_۲ = ۳۰\frac{m}{s}$$

۷۳ - گزینه ۱

$$\frac{W_۱}{W_۲} = \frac{\Delta K_۱}{\Delta K_۲} \Rightarrow \frac{F_۱ \cdot L_۱ \cdot \cos ۱۸۰}{F_۲ \cdot L_۲ \cdot \cos ۱۸۰} = \frac{\frac{۱}{۲}mv^۲ - \frac{۱}{۲}mv_۰^۲}{\frac{۱}{۲}mv'^۲ - \frac{۱}{۲}mv_۰'^۲}$$

$$\begin{cases} F_۲ = \frac{۱۵۰}{۱۰۰}F_۱ = ۱٫۵F_۱ \\ v_۰ = ۱۰\frac{m}{s}, v = ۶\frac{m}{s} \\ v'_۰ = ۶\frac{m}{s}, v' = ۲\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow \frac{F_۱L_۱}{۱٫۵F_۱L_۲} = \frac{\frac{۱}{۲}m \times ۶^۲ - \frac{۱}{۲}m \times ۱۰^۲}{\frac{۱}{۲}m \times ۲^۲ - \frac{۱}{۲}m \times ۶^۲}$$

$$\frac{۲}{۳}\frac{L_۱}{L_۲} = \frac{۶۴}{۳۲} \Rightarrow \frac{L_۱}{L_۲} = ۳$$

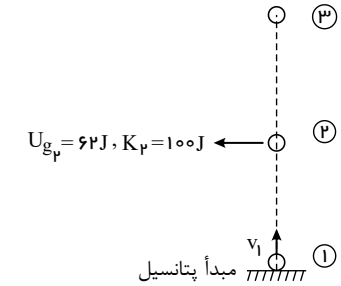
۷۴ - گزینه ۱ به دلیل آنکه شرایط خلأ حاکم است بنابراین انرژی مکانیکی پایسته است یعنی در همهٔ نقاط مقدار E یکسان است.

$$E_۱ = E_۲ \to K_۱ + \cancel{U_{g_۱}}^{۰} = K_۲ + U_{g_۲}$$

$$K_۱ = ۱۰۰ + ۶۲$$

$$\frac{۱}{۲} \times ۴ \times v_۱^۲ = ۱۶۲$$

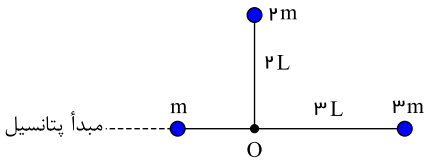
$$v_۱^۲ = ۸۱ \to v_۱ = ۹m/s$$



۷۵ - گزینه ۳ به دلیل نبود نیروی اصطکاک، انرژی مکانیکی پایستگی دارد: $E_۱ = E_۲$. در حالت اولیه، انرژی مکانیکی مجموعه برابر انرژی پتانسیل جسم با جرم $۲m$ نسبت به میلهٔ افقی است.

$$E_۱ = ۲m \cdot g \cdot ۲L = ۴mgL$$

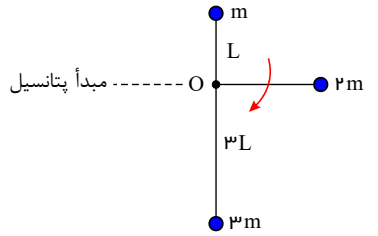
$$E_۲ = K_۲ + mgL - ۹mgL$$



در حالت دوم نسبت به حالت اول، انرژی پتانسیل جرم‌های m و $۳m$ تغییر می‌کند.

$$۴mgL = K_۲ - ۸mgL$$

$$K_۲ = ۱۲mgL$$



۷۶ - گزینه ۳

$$C_۶H_{۱۲}O_۶ + ۶O_۲ \rightarrow ۶CO_۲ + ۶H_۲O$$

روش اول:

$$۹۰g \text{ گلوکز} \times \frac{۱mol \text{ گلوکز}}{۱۸۰g \text{ گلوکز}} \times \frac{۶molO_۲}{۱mol \text{ گلوکز}} \times \frac{۳۲g\ O_۲}{۱molO_۲} = ۹۶g\ O_۲$$

روش دوم:

$$\begin{array}{ccccc} C_۶H_{۱۲}O_۶ & \sim & ۶O_۲ & & \\ \frac{۹۰g}{۱۸۰} & = & \frac{x\ g}{۶ \times ۳۲} & \Rightarrow & x = ۹۶g \end{array}$$

۷۷ - گزینه ۲

ابتدا واکنش را موازنه می‌کنیم:

$$SiO_۲(s) + ۳C(s) \xrightarrow{\Delta} SiC(s) + ۲CO(g)$$

روش اول:

$$?LCO = ۱kgSiC \times \frac{۱۰۰۰g}{۱kg} \times \frac{۱molSiC}{۴۰gSiC} \times \frac{۲molCO}{۱molSiC} \times \frac{۲۲/۴L\ CO}{۱molCO} = ۱۱۲۰L\ CO$$

روش دوم:

$$SiC \sim ۲CO$$

$$\frac{۱۰۰۰g}{۱ \times ۴۰} = \frac{x(L)}{۲ \times ۲۲/۴} \Rightarrow x = ۱۱۲۰LCO$$

۷۸ - گزینه ۳ روش اول:

$$gHNO_۳ = ۶molNO_۲ \times \frac{۲molHNO_۳}{۳molNO_۲} \times \frac{۶۳gHNO_۳}{۱molHNO_۳} = ۲۵۲gHNO_۳$$

روش دوم:

$$\begin{array}{ccccc} ۳NO_۲ & \sim & ۲HNO_۳ & & \\ \frac{۶mol}{۳} & = & \frac{x\ g}{۲ \times ۶۳} & \Rightarrow & x = ۲۵۲g \end{array}$$

۷۹ - گزینه ۱ برای موازنهٔ واکنش (I)، می‌توان ابتدا به $KMnO_۴$ ضریب ۱ داد و بقیهٔ ضرایب را با توجه به آن به‌دست آورد و پس از تبدیل ضریب‌های کسری به عدد صحیح، معادله به صورت زیر موازنه می‌شود:

$$۲KMnO_۴ + ۱۶HI \rightarrow ۲MnI_۲ + ۸H_۲O + ۲KI + ۵I_۲$$

برای موازنهٔ واکنش (II) ابتدا باید هیدروژن‌ها را موازنه کرد، یعنی به $H_۲O$ ضریب ۱ و به $NaOH$ ضریب ۲ داده و در مرحلهٔ بعدی، اکسیژن را موازنه نمود. موازنهٔ معادلهٔ (II) به صورت زیر است:

$$۴S + ۶NaOH \rightarrow ۲Na_۲S + Na_۲S_۲O_۳ + ۳H_۲O$$

II و I مجموع ضرایب $H_۲O$ در واکنش‌های $= ۸ + ۳ = ۱۱$

۸۰ - گزینه ۳

$$aNH_۳ + bO_۲ \rightarrow cNO + dH_۲O$$

گام اول: آغازگر موازنه، نیتروژن است پس در طرفین واکنش برای ترکیب‌های دارای آن، ضریب ۱ می‌گذاریم:

$$\underline{۱NH_۳} + bO_۲ \rightarrow \underline{۱NO} + dH_۲O$$

گام دوم: اکنون نوبت موازنه هیدروژن در سمت راست است:

$$۱NH_۳ + bO_۲ \rightarrow ۱NO + \frac{۳}{۲}H_۲O$$

برای از بین بردن مخرج کسر، ضرایب همهٔ ترکیبات موازنه شده را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\underline{۲NH_۳} + bO_۲ \rightarrow \underline{۲NO} + \underline{۳H_۲O}$$

گام سوم: در پایان، موازنه اکسیژن را در سمت چپ انجام می‌دهیم:

$$\underline{۲NH_۳} + \frac{۵}{۲}O_۲ \rightarrow \underline{۲NO} + \underline{۳H_۲O}$$

برای از بین بردن ضریب کسری، کافی است همهٔ ضرایب را در ۲ ضرب کنیم:

$$\underline{۴NH_۳} + \underline{۵O_۲} \rightarrow \underline{۴NO} + \underline{۶H_۲O}$$

۸۱ - گزینه ۲ گزینهٔ «۱»: گاز نئون - گاز نیتروژن ← گاز نئون آرایش هشت‌تایی دارد و اتم‌های گاز نیتروژن نیز با تشکیل یک پیوند اشتراکی سه‌گانه به آرایش هشت‌تایی رسیده است. (نادرست)

گزینهٔ «۲»: بخار سدیم - گاز کلر ← سدیم با تشکیل یون به آرایش گاز نجیب قبل از خود می‌رسد ولی کلر با تشکیل یون به آرایش گاز نجیب هم دورهٔ خود می‌رسد. (درست)

گزینهٔ «۳»: گاز آرگون - گاز هلیم ← مقدار گازهای نجیب در هواکره بسیار کم است و به گازهای کمیاب معروف هستند. (نادرست)

گزینهٔ «۴»: گاز اکسیژن - گاز هیدروژن ← در واکنش تشکیل آب از گازهای هیدروژن و اکسیژن که نوعی سوختن است، $H_۲$ و $O_۲$ هر دو واکنش‌دهنده هستند. (نادرست)

۸۲ - گزینه ۱

$$\underbrace{\frac{۰/۵۶\ L\ Cl_۲}{۲۲/۴\ L}}_{\text{تبدیل به مول}} \times \underbrace{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}}_{\text{عدد آووگادرو}} \times \underbrace{۲}_{\text{تعداد اتم } Cl} = \underbrace{\frac{x\ Ne\ gr}{۲۰}}_{\text{تبدیل به مول}} \times \underbrace{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}}_{\text{عدد آووگادرو}} \Rightarrow x = ۱g$$

روش دوم:

$$Cl_۲ \rightarrow ۲\,atom$$

$$\frac{(Ne \rightarrow ۱\,atom) \times ۲}{Cl_۲ \sim ۲Ne}$$

$$\frac{۰/۵۶L}{۲۲/۴} = \frac{x\,g}{۲ \times ۲۰} \Rightarrow x = ۱\ g$$

۸۳ - گزینه ۲

«۱» گزینهٔ : $CH_۴ + ۲O_۲ \rightarrow CO_۲ + ۲H_۲O \Rightarrow ۳ = ۳$ ☒

«۲» گزینهٔ : $۲C_۲H_۶ + ۷O_۲ \rightarrow ۴CO_۲ + ۶H_۲O \Rightarrow ۹ < ۱۰$ ☑

«۳» گزینهٔ : $CS_۲ + ۳O_۲ \rightarrow CO_۲ + ۲SO_۲ \Rightarrow ۴ > ۳$ ☒

«۴» گزینهٔ : $۲Cu_۲S + ۳O_۲ \rightarrow ۲Cu_۲O + ۲SO_۲ \Rightarrow ۵ > ۴$ ☒

۸۴ - گزینه ۲ از مقایسهٔ شکل سمت چپ و راست می‌توان گفت در این واکنش $B_۲$ و $AB_۲$ واکنش‌دهنده می‌باشند؛ زیرا مصرف شده‌اند. همچنین $B_۲$ به طور کامل مصرف نشده است و هنگام نوشتن معادلهٔ نمادی، فقط در سمت چپ معادله باید نوشته شود. ماده C در دو طرف واکنش مقدارش تغییر نکرده است؛ بنابراین می‌توان گفت این ماده می‌تواند کاتالیزگر باشد. تنها فرآوردهٔ این واکنش $AB_۳$ است.

$$۲AB_۲ + B_۲ \xrightarrow{C} ۲AB_۳$$

۸۵ - گزینه ۲ توجه کنید برای رسم نمودار دانستن حدودی نقطهٔ جوش $(^\circ C)$ و تبدیل آن به (K) کلوین ضروری است.

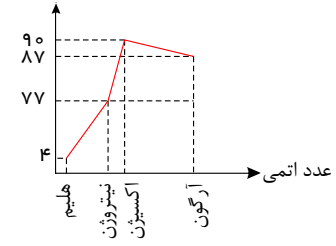
گاز	نقطهٔ جوش $(^\circ C)$
نیتروژن	-۱۹۶
اکسیژن	-۱۸۳
آرگون	-۱۸۶
هلیم	-۲۶۹

بررسی موارد:

مورد الف) نمودار کاملاً صعودی نمی‌باشد. ×

مورد ب) صحیح است. ✓

مورد ج) کم‌ترین نقطهٔ جوش متعلق به $_۲He$ و بیش‌ترین نقطهٔ جوش متعلق به $(_۸O)$ است و $۱۰ = ۸ + ۲$ که برابر عدد اتمی گاز نجیب نئون است. ✓



۸۶ - گزینه ۴

$$۳SCl_۲(g) + ۴NaF(g) \rightarrow SF_۴(g) + S_۲Cl_۲(g) + ۴NaCl(s)$$

$$SF_۴(g)+۲H_۲O(l)\rightarrow SO_۲(g)+۴HF(g)$$

$$?gNaF=۵۰LHF\times\frac{۰/۸gHF}{۱LHF}\times\frac{۱molHF}{۲۰gHF}\times\frac{۴molNaF}{۴molHF}\times\frac{۴۲gNaF}{۱molNaF}=۸۴gNaF$$

$$?gSO_۲=۵۰LHF\times\frac{۰/۸gHF}{۱LHF}\times\frac{۱molHF}{۲۰gHF}\times\frac{۱molSO_۲}{۴molHF}\times\frac{۶۴gSO_۲}{۱molSO_۲}=۳۲gSO_۲$$

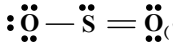
۸۷ - گزینه ۱ ابتدا واکنش را به‌صورت زیر موازنه می‌کنیم:

$$۲B_۲O_۳(s)+۶Cl_۲(g)\rightarrow ۴BCl_۳(l)+۳O_۲(g)$$

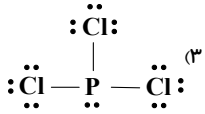
$$\begin{array}{ccc}۲B_۲O_۳(s) & \sim & ۳O_۲(g)\\ \frac{۱mol}{۲} & = & \frac{V}{۳\times ۲۲/۴}\end{array}\Rightarrow V=۳۳/۶L$$

۸۸ - گزینه ۴ در گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب «ساختار لوویس، نام $CO_۲$ و ساختار لوویس $PCl_۳$ »، نادرست است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) 

۲) کربن دی‌اکسید

۳) 

در ساختار لوویس، الکترون‌های ناپیوندی هم باید نشان داده شوند.

۸۹ - گزینه ۳

$$mC_xH_yO_۶+۱۶۳O_۲\rightarrow ۱۱۴CO_۲+۱۱۰H_۲O$$

موازنه O:

$$۶m+(۲\times ۱۶۳)=(۱۱۴\times ۲)+۱۱۰\rightarrow m=۲$$

موازنه C:

$$۲x=۱۱۴\rightarrow x=۵۷$$

موازنه H:

$$۲y=۲\times ۱۱۰\rightarrow y=۱۱۰$$

$$۲\overbrace{C_{۵۷}H_{۱۱۰}O_۶}^{A}+۱۶۳O_۲\rightarrow ۱۱۴CO_۲+۱۱۰H_۲O$$

$$A\text{ جرم مولی}=(۵۷\times ۱۲)+۱۱۰+(۶\times ۱۶)=۸۹۰g\cdot mol^{-۱}$$

$$?LO_۲=۸۹gA\times\frac{۱molA}{۸۹۰gA}\times\frac{۱۶۳molO_۲}{۲molA}\times\frac{۲۵LO_۲}{۱molO_۲}=۲۰۳/۷۵LO_۲$$

$$?molCO_۲=۸۹gA\times\frac{۱molA}{۸۹۰gA}\times\frac{۱۱۴molCO_۲}{۲molA}=۵/۷molCO_۲$$

۹۰ - گزینه ۳ عبارت‌های (ب) و (پ) و (ت) درست‌اند.

آ) تا ارتفاع ۸۰ کیلومتری، ۳ لایهٔ در هواکره وجود دارد.

ب) با افزایش ارتفاع، فشار هوا کاهش می‌یابد.

پ) در لایهٔ دوم برخلاف لایهٔ اول و سوم، با افزایش ارتفاع دمای هوا افزایش می‌یابد.

ت) در چهارمین لایهٔ هواکره، یون‌هایی از جمله O^+ ،$O_۲^+$ ،$N_۲^+$ ،He^+ و H^+ وجود دارد.

۹۱ - گزینه ۲ مطابق سه واکنش انجام‌شده، عبارت‌های دوم و سوم درست هستند.

$$۱)N_۲(g)+O_۲(g)\xrightarrow{\text{رعدوبرق}}۲NO(g)$$

$$۲)۲NO(g)+O_۲(g)\rightarrow ۲NO_۲(g)$$

$$۳)NO_۲(g)+O_۲(g)\xrightarrow{\text{نور خورشید}}NO(g)+O_۳(g)$$

بررسی همهٔ عبارت‌ها:

عبارت اول: فقط $NO_۲$ گاز قهوه‌ای‌رنگ است.

عبارت دوم: واکنش اول برای انجام، نیاز به دمای خیلی بالا یا رعدوبرق دارد، پس واکنش بین گازهای $N_۲$ با $O_۲$ نسبت به واکنش‌های دیگر با میل کمتری انجام می‌شود.

عبارت سوم: در واکنش اول با مصرف یک مول $O_۲$، دو مول NO تولید می‌شود. در واکنش دوم نیز با مصرف یک مول $O_۲$ و دو مول NO، دو مول $NO_۲$ تولید می‌شود. در واکنش سوم دو مول $NO_۲$ مربوط

به واکنش دوم با دو مول O_2 واکنش داده و دو مول O_3 تولید می‌کند. درمجموع ۴ مول O_2 مصرف و ۲ مول O_3 تولید شده است.

عبارت چهارم: مطابق واکنش‌ها، ضریب استوکیومتری NO_2 در واکنش‌های دوم و سوم به‌ترتیب برابر ۱ و ۲ است.

۹۲ - گزینه ۳ شمار اتم‌های موجود در ظرف (I) برابر $۰/۴۸N_A = ۰/۲۴ \times ۲N_A$ و شمار اتم‌های موجود در ظرف (II)، $۱۲N_A = ۲/۴N_A \times \frac{۱۱/۲}{۵۶}$ است، بنابراین نسبت شمار اتم‌های موجود در ظرف (II) به ظرف (I) برابر $\frac{۲/۴}{۰/۴۸} = ۵$ است.

$$۱۱/۲gC_4H_8 \times \frac{۱molC_4H_8}{۵۶gC_4H_8} = ۰/۲molC_4H_8$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: در دمای یکسان، هر چه تعداد مول‌های گازی بیشتر باشد، فشار آن نیز بیشتر است.

گزینهٔ «۲»: برای واکنش دادن ۰/۲ مول گاز C_4H_8 طبق معادلهٔ موازنه‌شده، ۱/۲ مول گاز اکسیژن لازم است.

$$C_4H_8(g) + ۶O_2(g) \rightarrow ۴CO_2(g) + ۴H_2O(g)$$

گزینهٔ «۴»: ۱۲/۳۲ گرم گاز CO معادل $\frac{۱۲/۳۲}{۲۸} = ۰/۴۴$ مول است و مجموع شمار مول‌های گازی در دو ظرف نیز برابر $۰/۴۴ = ۰/۲۴ + ۰/۲$ مول است، پس در شرایط STP، حجم مجموع دو گاز با حجم گاز CO برابر است.

۹۳ - گزینه ۴ هر چهار مورد درست هستند.

۹۴ - گزینه ۳ ساختار ترکیب‌های داده شده به‌صورت $:\ddot{O} - \dot{N} = \ddot{O}$ و $\cdot\dot{N} = \ddot{O} :,:\ddot{\underset{\cdot\cdot}{O}} - \dot{N} = \ddot{O}$ است که در آن‌ها به‌ترتیب اتم‌های نیتروژن، نیتروژن و هیدروژن به آرایش هشت‌تایی نرسیده‌اند.

$$H - \overset{H}{\underset{H}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}} - H$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱)

$$:\ddot{\underset{\cdot\cdot}{F}} - \ddot{\underset{:\ddot{\underset{\cdot\cdot}{F}}:}{\overset{|}{X}}} - \ddot{\underset{\cdot\cdot}{F}}: \Rightarrow ۲۶ = X + ۳(۷) \Rightarrow X = ۵ \Rightarrow \text{گروه } ۱۵$$

۲) ساختار $NOCl$ به‌صورت $\ddot{\underset{\cdot\cdot}{Cl}} - \ddot{N} = \ddot{O}$: است که ۳ جفت الکترون پیوندی و ۶ جفت الکترون ناپیوندی دارد.

۴) ساختار CO و O_3 به‌صورت $C \equiv O$: و $\ddot{O} - \ddot{\underset{\cdot\cdot}{O}} = \ddot{O}$: است که تعداد الکترون‌های پیوندی در آن‌ها یکسان و برابر ۳ است.

۹۵ - گزینه ۳ موارد سوم و چهارم صحیح هستند.

شکل درست موارد نادرست:

مورد اول) اگر هواکره وجود نداشت، میانگین دمای کرهٔ زمین به $-۱۸^\circ C$ کاهش می‌یافت.

مورد دوم) فراورده های سوختن زغال‌سنگ شامل CO_2، H_2O و $\underline{SO_2}$ است.

۹۶ - گزینه ۲

$$(I)۴NH_2CH_2COOH(l) + ۹O_2(g) \rightarrow ۸CO_2(g) + ۲N_2(g) + ۱۰H_2O(g)$$

$$(II)۴Fe(s) + ۶H_2O(l) + ۳O_2(g) \rightarrow ۴Fe(OH)_3(s)$$

$$\frac{۱۳}{۲۰} = ۰/۶۵$$

$$?L\ O_2 = ۱۰/۷g\ Fe(OH)_3 \times \frac{۱mol\ Fe(OH)_3}{۱۰۷g\ Fe(OH)_3} \times \frac{۳mol\ O_2}{۴mol\ Fe(OH)_3} \times \frac{۲۲/۴L\ O_2}{۱mol\ O_2} = ۱/۶۸L\ O_2$$

۹۷ - گزینه ۲ پاسخ درست پرسش‌های مطرح شده به‌صورت زیر است:

بررسی موارد:

مورد الف) عنصر تولید شده در این واکنش گوگرد است که با توجه به آرایش الکترونی آن $(۱s^2۲s^2۲p^6۳s^2۳p^4)$ دارای ۶ الکترون با $n = ۳$ $(۳s^2۳p^4)$ بوده و ۶ الکترون نیز با $l = ۰$ $(۱s^2, ۲s^2, ۳s^2)$ دارد. به این‌ترتیب نسبت بین آن‌ها برابر با $\frac{۶}{۶} = ۱$ است.

مورد ب) واکنش موازنه شده به‌صورت زیر است:

$$۲HNO_3(aq) + ۳H_2S(g) \rightarrow ۲NO(g) + ۳S(s) + ۴H_2O(l)$$

مورد پ) تعداد الکترون‌های ظرفیت O و N عبارتند از:

${}_{8}O : 1s^2 2s^2 2p^4$ ۶ الکترون ظرفیت

${}_{7}N : 1s^2 2s^2 2p^3$ ۵ الکترون ظرفیت

تعداد الکترون‌های ظرفیت این دو عنصر به اندازهٔ یک $(5-6)$ واحد با هم تفاوت دارد. از آنجا که در گزینه‌های داده شده دو عنصر ${}_{37}A$ و ${}_{38}X$ مدنظر بوده‌اند. شمارهٔ گروه آن‌ها عبارت است از:

${}_{37}A : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 5s^1 \Rightarrow$ شماره گروه $= 1$

${}_{38}X : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 5s^2 \Rightarrow$ شماره گروه $= 2$

مورد ت) برای تعیین حجم گاز H_2S مصرفی که منجر به تولید ۶۰ گرم آب می‌شود، خواهیم داشت:

$$?LH_2S = 60gH_2O \times \frac{1molH_2O}{18gH_2O} \times \frac{3molH_2S}{4molH_2O} \times \frac{24LH_2S}{1molH_2S} = 60LH_2S$$

۹۸ - گزینه ۲ ابتدا در گزینه‌های ۱ و ۲، دمای کلوین را به درجهٔ سلسیوس تبدیل می‌کنیم:

$$70 = (^\circ C) + 273 \Rightarrow -203^\circ C$$
$$83 = (^\circ C) + 273 \Rightarrow -190^\circ C$$

دمایی که بتوان گاز نیتروژن را از مخلوط مایع جدا کرد، باید بالاتر از نقطهٔ جوش گاز نیتروژن باشد.

چون نقطهٔ جوش گاز نیتروژن دمای $(-196^\circ C)$ است؛ پس دمای $-190^\circ C$ که بالاتر از آن است مناسب است یعنی ۸۳ کلوین.

دقت کنید که $-182^\circ C$ هم بالاتر از نقطهٔ جوش نیتروژن است اما در این دما، آرگون و اکسیژن هم به صورت گاز از مخلوط جدا می‌شوند.

۹۹ - گزینه ۲ عبارت‌های سوم و چهارم درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

عبارت اول: ساختار فیزیکی و شیمیایی هر ماده، تعیین‌کنندهٔ خواص و رفتار آن است.

عبارت دوم: افزایش مقدار کربن‌دی‌اکسید در هواکره، سبب اسیدی‌تر شدن باران و درنتیجه کاهش pH آب‌ها می‌شود.

۱۰۰ - گزینه ۳ عبارت‌های (پ) و (ت) نادرست‌اند.

پ) تعداد جفت الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی در این دو ترکیب برابر نیست.

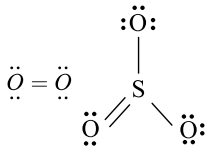
۱۲ جفت الکترون پیوندی و ناپیوندی

۸ جفت الکترون پیوندی و ناپیوندی

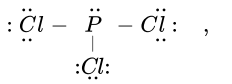
ت) اگر از NO_2Cl یک اتم اکسیژن کم کنیم، ترکیب $NOCl$ حاصل می‌شود. نسبت تعداد الکترون‌های ناپیوندی به پیوندی در NO_2Cl و $NOCl$ برابر ۲ است.

بررسی سایر عبارت‌ها:

آ) باتوجه به رسم ساختار لوویس این دو ترکیب، می‌توان دریافت که مجموع تعداد جفت الکترون‌های ناپیوندی این دو ترکیب برابر ۱۲ جفت است.



ب) ترکیب PCl_3 دارای ۲۶ الکترون (پیوندی و ناپیوندی) است و CO_2 دارای ۱۶ الکترون (پیوندی و ناپیوندی) در ساختار خود است. $\frac{26}{16} \simeq 1{,}62$



۱۰۱ - گزینه ۲ ابتدا دمای $145K$ را به درجهٔ سلسیوس تبدیل می‌کنیم:

$$T_{\text{کلوین}} = T(^\circ C) + 273$$
$$145 = (^\circ C) + 273 \Rightarrow T = -128^\circ C$$

فراوان‌ترین گاز نجیب موجود در هواکره، آرگون است که در دمای $-186^\circ C$ به حالت مایع در می‌آید، پس از $-128^\circ C$ به $-186^\circ C$ باید دما را کاهش دهیم یعنی $58^\circ C$!

$$\text{درصد کاهش دما} = \frac{\text{میزان کاهش دما}}{\text{دمای اولیه}} \times ۱۰۰ \Rightarrow |\frac{۵۸}{۱۲۸}| \times ۱۰۰ \simeq \%۴۵$$

۱۰۲ - گزینه ۳ موارد «الف»، «ت» و «ث» عبارت داده‌شده را به‌درستی تکمیل می‌کنند.

کمترین دما در لایهٔ تروپوسفر نمی‌باشد. ذرات باردار در ارتفاعات بالای هواکره ایجاد می‌شود نه در لایهٔ تروپوسفر.

۱۰۳ - گزینه ۳ موارد (پ) و(ت) درست هستند.

بررسی موارد نادرست:

آ) CO، گازی بی‌رنگ، بی‌بو و سمی است که چگالی کمتری از هوا دارد.

ب) Ar (آرگون) در جوشکاری، برش فلزها و ساخت لامپ‌های رشته‌ای کاربرد دارد.

۱۰۴ - گزینه ۲

مقدار $CO_۲$ تولیدی در یک ماه (کیلوگرم)	منبع تولید برق	برق مصرفی در یک ماه ($kw \cdot h$)
$۰/۹ \times y$	زغال سنگ	y
$۰/۷ \times y$	نفت خام	

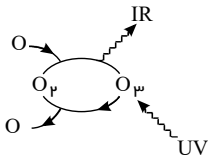
$$\text{کربن دی‌اکسید خانهٔ } B = ۲ \times \text{کربن دی‌اکسید خانهٔ } A$$

$$۰/۹y_B = ۲ \times ۰/۷y_A \Rightarrow \frac{y_A}{y_B} = \frac{۰/۹}{۱/۴} \simeq ۰/۶۴$$

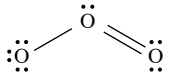
۱۰۵ - گزینه ۴ واکنش $۳O_۲ \rightleftharpoons ۲O_۳ + UV$ پرتو در حضور تابش فرابنفش، بیشتر در جهت رفت انجام می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱): شکل درست به صورت رو به رو است:



(۲): مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در معادلهٔ واکنش برابر با ۴ است: $NO_۲ + O_۲ \rightarrow NO + O_۳$

در حالی‌که شمار جفت الکترون‌های پیوندی دراوزون ()، برابر با ۳ می‌باشد.

(۳): در میان اکسیدهای نیتروژن، تنها $NO_۲$ قهوه‌ای است، نه تمام اکسیدها.